Niech $\mathrm{af}(P_0,\, P_1,\, \ldots,\, P_k)$ oznacza $k-$ wymiarową podprzestrzeń afiniczną przestrzeni $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ rozpiętą przez punkty $P_0, P_1 \ldots, P_k$:

$$\mathrm{af}(P_0, P_1, \ldots, P_k) = P_0 + \mathrm{lin}(\overrightarrow{P_0 P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0 P_k}).$$

**Twierdzenie 4.2. (Ceva'y)** *Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem, niech $A', B', C'$ będą różnymi od wierzchołków punktami leżącymi na prostych $\mathrm{af}(B,C)$, $\mathrm{af}(A,C)$ i $\mathrm{af}(A,B)$, odpowiednio. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *proste $\mathrm{af}(A,A')$, $\mathrm{af}(B,B')$ i $\mathrm{af}(C,C')$ mają punkt wspólny (tj. są* ***współpękowe****) lub są równoległe,*
2. $\frac{|AB'\rangle}{|B'C\rangle} \cdot \frac{|CA'\rangle}{|A'B\rangle} \cdot \frac{|BC'\rangle}{|C'A\rangle} = 1.$

**Wniosek 4.3.**

1. *Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazywanym* ***centroidem*** *lub* ***środkiem ciężkości****).*
2. *Wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (nazywanym* ***ortocentrum****).*
3. *Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jedynym punkcie (nazywanym* ***incentrum****).*
4. *Jeśli* $A'$, $B'$, $C'$ *są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt* $\triangle ABC$ *leżącymi naprzeciwko wierzchołków* $A, B, C$*, odpowiednio, to proste* $\mathrm{af}(A, A')$, $\mathrm{af}(B, B')$ *i* $\mathrm{af}(C, C')$ *przecinają się w jednym punkcie.*
5. *Niech* $A' \in \overline{BC}, B' \in \overline{AC}$ *oraz* $C' \in \overline{AB}$ *będą punktami, które dzielą każdy z boków trójkąta w proporcji równej proporcji miar kątów przyległych. Wówczas proste* $\mathrm{af}(A, A')$, $\mathrm{af}(B, B')$ *i* $\mathrm{af}(C, C')$ *przecinają się w jednym punkcie.*

## 4.2 Sympleksy.

**Definicja 4.4.** *Zbiór punktów* $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *jest* ***geometrycznie niezależny****, jeżeli dla dowolnego ciągu skalarów* $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ *takich, że*

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 0,$$

*jeżeli*

$$t_0 P_0 + t_1 P_1 + \cdots + t_k P_k = 0,$$

*to*

$$t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0.$$

**Uwaga 4.5.** Zbiór punktów $P_0, P_1, ..., P_k \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ jest geometrycznie niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów

$$\overrightarrow{P_0P_1}, ..., \overrightarrow{P_0P_k}$$

jest liniowo niezależny.

**Definicja 4.6.** $k$ – ***sympleksem*** *generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów* $P_0, P_1, ..., P_k \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *nazywamy zbiór*

$$\triangle^k(P_0, P_1, ..., P_k) = \{t_0P_0 + t_1P_1 + \cdots + t_kP_k | \, t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1 \wedge t_0 \geqslant 0, t_1 \geqslant 0, ..., t_k \geqslant 0\}.$$

**Przykłady:**

1. $0-$ sympleksy.
2. $1-$ sympleksy.
3. $2-$ sympleksy.
4. $3-$ sympleksy.
5. $\ldots$

**Definicja 4.7.** *Niech $\triangle^k(P_0, P_1, ..., P_k)$ będzie $k-$ sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależne punkty $P_0, P_1, ..., P_k$.*

*Punkty $P_0, P_1, ..., P_k$ nazywamy **wierzchołkami** sympleksu, a liczbę $k$ jego **wymiarem**.*

*Każdy sympleks generowany przez pewien podzbiór zbioru $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ nazywamy **ścianą**, w szczególności sympleks $\triangle^{k-1}(P_0,\ P_1,\ ...,\ P_{i-1},\ P_{i+1},\ ...,\ P_k)$ nazywamy ścianą leżącą **naprzeciw** wierzchołka $P_i$, ściany jednowymiarowe nazywamy **krawędziami**, a ściany różne od $\triangle^k(P_0, P_1, ..., P_k)$ nazywamy ścianami **właściwymi**.*

*Sumę mnogościową wszystkich ścian właściwych nazywamy **brzegiem** sympleksu i oznaczamy przez $\mathrm{Bd}\,\triangle^k(P_0,\ P_1,\ ...,\ P_k)$, zaś **wnętrze** sympleksu definiujemy jako $\triangle^k(P_0,\ P_1,\ ...,\ P_k) \setminus \mathrm{Bd}\,\triangle^k(P_0, P_1, ..., P_k)$ i oznaczamy przez $\mathrm{Int}\,\triangle^k(P_0, P_1, ..., P_k)$.*

## 4.3 Pierwsze twierdzenie Buby-Brzozowej.

**Twierdzenie 4.8. (Buby-Brzozowej)** *Niech* $\triangle^n(P_0, P_1, ..., P_n) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *będzie sympleksem* $n-$ *wymiarowym, niech* $B_{ij} \in \mathrm{Int}\triangle^1(P_iP_j)$ *będą punktami na krawędziach sympleksu różnymi od wierzchołków, niech* $H_{ij} = \mathrm{af}(B_{ij}, P_0, P_1, ..., P_{i-1}, P_{i+1}, ..., P_{j-1}, P_{j+1}, ..., P_n)$ *będą hiperpowierzchniami generowanymi przez punkty* $B_{ij}$ *i wierzchołki różne od końców krawędzi, do których należą punkty* $B_{ij}$*. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *hiperpowierzchnie* $H_{ij}$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$ *mają punkt wspólny,*

2. $\frac{|P_i B_{ij}\rangle}{|B_{ij}P_j\rangle} \cdot \frac{|P_j B_{jk}\rangle}{|B_{jk}P_k\rangle} \cdot \frac{|P_k B_{ik}\rangle}{|B_{ik}P_i\rangle} = 1$, *dla wszeklich* $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

## 4.4 Klasyczne twierdzenie Menelausa.

**Twierdzenie 4.9. (Menelausa z Aleksandrii)** *Niech* $\triangle ABC$ *będzie trójkątem, niech* $A', B', C'$ *będą różnymi od wierzchołków punktami leżącymi na prostych* $\mathrm{af}(B, C)$, $\mathrm{af}(A, C)$ *i* $\mathrm{af}(A, B)$, *odpowiednio. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *punkty* $A', B', C'$ *są współliniowe,*
2. $\frac{|AB'\rangle}{|B'C\rangle} \cdot \frac{|CA'\rangle}{|A'B\rangle} \cdot \frac{|BC'\rangle}{|C'A\rangle} = -1.$

## 4.5 Drugie twierdzenie Buby-Brzozowej.

**Twierdzenie 4.10. (Buby-Brzozowej)** *Niech* $\triangle^n(P_0, P_1, ..., P_n) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ *będzie sympleksem* $n-$ *wymiarowym, niech* $B_{ij} \in \mathrm{Int}\triangle^1(P_iP_j)$ *będą punktami na krawędziach sympleksu różnymi od wierzchołków. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *punkty* $B_{ij}$*,* $0 \leqslant i < j \leqslant n$ *należą do jednej hiperpowierzchni wymiaru* $n-1$*,*

2. $\frac{|P_i B_{ij}\rangle}{|B_{ij}P_j\rangle} \cdot \frac{|P_jB_{jk}\rangle}{|B_{jk}P_k\rangle} \cdot \frac{|P_kB_{ik}\rangle}{|B_{ik}P_i\rangle} = -1$*, dla wszeklich* $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$*.*