3 Kwaterniony.

3.1 K-algebry i algebra kwaternionów.

Definicja 3.1. *Niech K będzie ciałem. Przestrzeń wektorową A nad ciałem K nazywamy **K-algebrą**, jeżeli określimy w niej działanie mnożenia $\cdot\colon A\times A\to A$ spełniające następujące warunki:*

i. $\forall x,y,z\in A\,[(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z]$;

ii. $\forall x,y,z\in A\,[z\cdot(x+y)=z\cdot x+z\cdot y]$;

iii. $\forall a,b\in K\,\forall x,y\in A\,[(ax)\cdot(by)=(ab)(x\cdot y)]$.

*Jeżeli działanie $\cdot$ jest łączne, K-algebrę A nazywamy **łączną**.*

*Jeżeli działanie $\cdot$ jest przemienne, K-algebrę A nazywamy **przemienną**.*

***Podalgebrą** K-algebry A nazywamy podprzestrzeń B przestrzeni A taką, że*

$$\forall x,y\in B\,[x\cdot y\in B].$$

***Bazą** K-algebry A nazywamy bazę przestrzeni wektorowej A, a **wymiarem** K-algebry A nazywamy wymiar $\dim A$ przestrzeni wektorowej A.*

*Jeżeli w K-algebrze A istnieje element neutralny 1_A działania $\cdot$, to algebrę nazywamy **unitarną**.*

*Jeżeli każdy niezerowy element K-algebry A ma element odwrotny względem działania $\cdot$, to A nazywamy **algebrą z dzieleniem**.*

Na tym wykładzie będziemy zajmować się wyłącznie K-algebrami łącznymi i unitarnymi, które będziemy krótko nazywać $\boldsymbol{K}$**-algebrami**.

Przykłady:

1. Liczby zespolone $\mathbb{C}$ tworzą $\mathbb{R}$-algebrę (przemienną, wymiaru 2, z dzieleniem). Ogólniej, dla dowolnego rozszerzenia ciał $L \supseteq K$, ciało L tworzy K-algebrę (przemienną, wymiaru równego stopniowi rozszerzenia $L \supseteq K$.
2. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ tworzy $\mathbb{R}$-algebrę z działaniem $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iloczynu wektorowego (niełączną, nieprzemienną, wymiaru 3).
3. Wielomiany $K[x]$ tworzą K-algebrę (przemienną, wymiaru ∞).
4. Macierze K_n^n tworzą K-algebrę (nieprzemienną, wymiaru n^2).
5. Macierze odwracalne $\mathrm{Gl}(n, K)$ tworzą K-algebrę (nieprzemienną, wymiaru n^2, z dzieleniem).
6. Endomorfizmy $\mathrm{End}\, V$ przestrzeni wektorowej V nad ciałem K tworzą K-algebrę (nieprzemienną, możliwie ∞ wymiaru).

Uwaga 3.2. Niech A będzie L-algebrą, zaś $L \supseteq K$ rozszerzeniem ciał. Wówczas A jest też K-algebrą.

Przykład:

1. Liczby zespolone $\mathbb{C}$ są $\mathbb{R}$-algebrą, ale też $\mathbb{Q}$-algebrą.
2. Macierze $M_n^n(\mathbb{C})$ są $\mathbb{C}$-algebrą, ale też $\mathbb{R}$-algebrą.

Definicja 3.3. *Niech K będzie ciałem, zaś A i B dwiema K-algebrami. Przekształcenie liniowe $\varphi\colon A\to B$ nazywami **homomorfizmem K-algebr**, jeżeli*

$$\forall x,y\in A\,[\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)].$$

Zbiór wszystkich homomorfizmów $\varphi\colon A\to B$ oznaczamy $\mathrm{Hom}_{K-\mathrm{alg}}(A,B)$.

*Jeżeli dodatkowo φ jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych A i B, to jest też **izomorfizmem** K-algebr. Izomorficzne K-algebry oznaczamy przez $A\cong B$.*

Jeżeli A i B są K-algebrami unitarnymi, to dodatkowo wymagamy aby homomorfizm K-algebr $\varphi\colon A\to B$ spełniał warunek

$$\varphi(1_A)=1_B.$$

Przykłady:

1. Przekształcenie $\varphi\colon \operatorname{End} K^n \to K_n^n$ dane wzorem

$$\varphi(f) = \text{macierz } f \text{ w bazie } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

jest izomorfizmem K-algebr.

Stwierdzenie 3.4. *Niech A będzie skończeniewymiarową K-algebrą o bazie $(e_1, \ldots, e_n)$. Wówczas mnożenie $\cdot\colon A \times A \to A$ jest jednoznacznie określone przez określenie mnożenia na elementach bazowych.*

Wniosek 3.5. *Niech A będzie skończeniewymiarową K-algebrą o bazie $(e_1, \ldots, e_n)$. Wówczas struktura K-algebry A jest jednoznacznie określona przez n^3 skalarów $c_{i,j,k} \in K$ zdefiniowanych następująco:*

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j,k} e_k$$

*Współczynniki $c_{i,j,k}$ nazywamy **współczynnikami strukturalnymi**.*

Definicja 3.6. *Czterowymiarową* $\mathbb{R}$*-algebrę* $\mathbb{H}$ *o bazie* $(1, i, j, k)$ *nazywamy* ***algebrą kwaternionów***, *jeżeli*

i. $\forall x \in \mathbb{H}\,[1 \cdot x = x \cdot 1 = x]$,

ii. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

iii. $i \cdot j = k = -j \cdot i$.

Stwierdzenie 3.7. *Niech* $\mathrm{Quat}_{\mathbb{C}}$ *będzie podalgebrą* $\mathbb{C}$*-algebry* $M_2^2(\mathbb{C})$ *o bazie*

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Wówczas $\mathrm{Quat}_{\mathbb{C}}$ *jest też* $\mathbb{R}$*-algebrą i jako taka jest izomorficzna z* $\mathbb{R}$*-algebrą* $\mathbb{H}$*.*

Stwierdzenie 3.8. *Niech* $\mathrm{Quat}_{\mathbb{R}}$ *będzie podalgebrą* $\mathbb{R}$*-algebry* $M_4^4(\mathbb{R})$ *o bazie*

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $\mathrm{Quat}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}$*.*

Definicja 3.9. *Niech A będzie K-algebrą. Podprzestrzeń I przestrzeni A nazywamy* ***lewostronnym ideałem****, jeżeli*

$$\forall a \in A \forall x \in I \, [a \cdot x \in I],$$

prawostronnym ideałem*, jeżeli*

$$\forall a \in A \forall x \in I \, [x \cdot a \in I],$$

i ***obustronnym ideałem****, jeżeli jest równocześnie lewostronnym i prawostronnym ideałem.*

Przykłady:

1. Jeżeli K-algebra A jest łączna i unitarna, tj. jest pierścieniem z jedynką, to każdy ideał (lewostronny, prawostronny, obustronny) pierścienia A jest też ideałem (lewostronnym, prawostronnym, obustronnym) K-algebry A.

2. Niech A będzie jednowymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$ i zdefiniujmy działanie $\cdot\colon A \times A \to A$ wzorem $x \cdot y = 0$, dla $x,\ y \in A$. Wówczas A jest $\mathbb{Q}$-algebrą nieunitarną i pierścieniem bez jedynki. Każda właściwa podgrupa grupy addytywnej A jest ideałem pierścienia A, ale niekoniecznie ideałem $\mathbb{Q}$-algebry A.

Definicja 3.10. *K-algebrę A nazywamy* ***prostą****, jeżeli nie zawiera obustronnych ideałów innych niż $\{0\}$ i A.*

Przykłady:

1. Dowolne ciało jest algebrą prostą nad swoim dowolnym podciałem.
2. Dowolna algebra z dzieleniem jest prosta.
3. $\mathbb{H}$ jest $\mathbb{R}$-algebrą prostą.

Twierdzenie 3.11. (Wedderburn-Artin) *Każda skończenie wymiarowa K-algebra prosta jest izomorficzna z $M_n^n(D)$, gdzie D jest skończenie wymiarową K-algebrą z dzieleniem.*

Twierdzenie 3.12. (Frobenius) *Każda skończenie wymiarowa* $\mathbb{R}$*-algebra z dzieleniem jest izomorficzna z* $\mathbb{R}$*, lub z* $\mathbb{C}$*, lub z* $\mathbb{H}$*.*

3.2 Własności kwaternionów.

Definicja 3.13. *Niech* $\mathfrak{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}$ *będzie kwaternionem.*

Kwaternionem ***sprzężonym*** *do* $\mathfrak{q}$ *nazywamy kwaternion* $\bar{\mathfrak{q}} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$.

Normą *kwaternionu nazywamy liczbę* $N(\mathfrak{q}) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$.

Normą euklidesową *kwaternionu nazywamy liczbę* $\|\mathfrak{q}\| = \sqrt{N(\mathfrak{q})}$.

Uwaga 3.14.

1. $N(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cdot \bar{\mathfrak{q}}$, dla $\mathfrak{q} \in \mathbb{H}$.
2. $N(\mathfrak{q}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{q} = 0$.
3. Odwzorowanie $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{H}$ dane wzorem $x \mapsto x \cdot 1 + 0i + 0j + 0k$ jest zanurzeniem $\mathbb{R}$-algebr; $\mathbb{R}$ będziemy utożsamiać z podalgebrą $\mathrm{lin}(1) < \mathbb{H}$.
4. Niech $\mathbb{V} = \mathrm{lin}(i, j, k) < \mathbb{H}$. Wówczas $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^3$ jako przestrzeń liniowa oraz $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}$.

Definicja 3.15. *Niech* $\mathfrak{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 + v \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{V} = \mathbb{H}$ *będzie kwaternionem.*

q_0 *nazywamy* ***częścią rzeczywistą*** *kwaternionu* $\mathfrak{q}$, *zaś* v ***częścią urojoną****.*

Jeżeli $q_0 = 0$, *to* $\mathfrak{q}$ *nazywamy* ***kwaternionem czystym****.*

Stwierdzenie 3.16. *Niech* $\mathfrak{q} = q_0 + v, \mathfrak{r} = r_0 + w \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}$. *Wówczas*

$$\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} = (q_0 r_0 - v \cdot w) + (v \times w + q_0 w + r_0 v).$$

Wniosek 3.17. *Niech* $v, w \in \mathbb{V}$ *będą kwaternionami czystymi. Wówczas*

$$\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} = (-v \cdot w) + (v \times w)$$

Stwierdzenie 3.18. *Niech* $0 \neq \mathfrak{q} \in \mathbb{H}$*. Wówczas* $\mathfrak{q}$ *jest odwracalny oraz*

$$\mathfrak{q}^{-1} = \frac{1}{N(\mathfrak{q})} \cdot \bar{\mathfrak{q}}.$$

W szczególności $\mathbb{H}^{\times} = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ *tworzy grupę multyplikatywną.*

3.3 Kwaterniony a obroty.

Uwaga 3.19. Niech $0 \neq \mathfrak{q} \in \mathbb{H}$.

1. Odwzorowanie $R_{\mathfrak{q}} \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dane wzorem

$$R_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{q}^{-1}$$

   jest endomorfizmem $\mathbb{R}$-algebry $\mathbb{H}$.

2. $R_{\mathfrak{q}}(\mathbb{V}) \subseteq \mathbb{V}$.
3. $R_{\mathfrak{q}} = R_{a\mathfrak{q}}$ dla dowolnego $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

Uwaga 3.20. Niech $\mathfrak{q} \in \mathbb{H}$. Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone kąt $\varphi \in [0, 2\pi)$ oraz wektor unormowany $\hat{v} \in \mathbb{V}$ takie, że

$$\mathfrak{q} = (\|\mathfrak{q}\| \cos\varphi) + (\|\mathfrak{q}\| \hat{v} \sin\varphi) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}.$$

Stwierdzenie 3.21. *Niech* $\mathfrak{q} = (\|\mathfrak{q}\| \cos\varphi) + (\|\mathfrak{q}\| \hat{v} \sin\varphi) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}$. *Wówczas* $R_{\mathfrak{q}} \restriction_{\mathbb{V}} \in \mathrm{End}\mathbb{V}$ *jest obrotem wokół wektora* $\hat{v}$ *o kąt* 2φ.

Uwaga 3.22.

1. Sfera jednostkowa

$$S^3 = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{H} |\ N(\mathfrak{q}) = 1\}$$

   jest podgrupą grupy multyplikatywnej $\mathbb{H}^\times$.

2. Obroty $O(\mathbb{V})$ tworzą podgrupę grupy $\mathrm{End}\mathbb{V}$.

Stwierdzenie 3.23. *Odwzorowanie* $S^3 \twoheadrightarrow O(\mathbb{V})$ *dane wzorem* $\mathfrak{q} \mapsto R_{\mathfrak{q}} \restriction_{\mathbb{V}}$ *jest epimorfizmem grup. Ponadto przeciwobrazem dowolnego obrotu jest para punktów antypodycznych na sferze.*

Uwaga 3.24. Niech $\mathfrak{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}$ będzie kwaternionem.

1. Lewostronne mnożenie $\mathfrak{r} \mapsto \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r}$ jest endomorfizmem przestrzeni liniowej $\mathbb{H}$ o macierzy:

$$M_{\mathfrak{q}}^{L} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

2. Prawostronne mnożenie $\mathfrak{r} \mapsto \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{q}$ jest endomorfizmem przestrzeni liniowej $\mathbb{H}$ o macierzy:

$$M_{\mathfrak{q}}^{R} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

3. Jeżeli $N(\mathfrak{q}) = 1$ oraz $\mathfrak{q} = (\cos\varphi) + (\hat{v}\sin\varphi) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}$, to odwzorowanie $R_{\mathfrak{q}} \in \operatorname{End} \mathbb{H}$ ma macierz

$$M_{\bar{\mathfrak{q}}}^{R} \cdot M_{\mathfrak{q}}^{L} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & O_{\hat{v},2\varphi} \end{array}\right]$$

gdzie

$$O_{\hat{v},2\varphi} = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_1q_2+2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & -2q_0q_1+2q_2q_3 \\ -2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

3.4 Centralne algebry proste.

Definicja 3.25. *Niech A będzie K-algebrą. Zbiór*

$$Z(A) = \{x \in A |\, x \cdot a = a \cdot x \;\; dla\ wszystkich\ a \in A\}$$

*nazywamy **centrum** algebry A.*

*Algebrę A nazywamy **centralną**, jeżeli $Z(A) = K \cdot 1$.*

*K-algebę A nazywamy **centralną algebrą prostą**, jeżeli jest centralna, prosta i skończonego wymiaru.*

Przykłady:

1. $\mathbb{C}$ jest centralną algebrą prostą nad $\mathbb{C}$, ale nie nad $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{H}$ jest centralną algebrą prostą nad $\mathbb{R}$.