# Algebra z geometrią

dr hab. Paweł Gładki, prof. UŚ

www.math.us.edu.pl/~pgladki

## Konsultacje

Środa, godz. 13:00 – 13:45

## Zasady zaliczania przedmiotu

- 2 kolokwia, każde warte 15 punktów
- 2 sprawdziany, każdy warty 6 punktów
- aktywność na zajęciach, warta 3 punkty
- zadania domowe, warte 15 punktów
- egzamin, warty 40 punktów

Do egzaminu przystępuje tylko ci studenci, którzy uzyskają zaliczenie z ćwiczeń.

Warunkiem zaliczenia ćwiczeń jest zdobycie co najmniej 30 punktów.

Warunkiem zdania egzaminu jest zdobycie co najmniej 60 punktów.

Każde kolokwium będzie trwało 90 minut, każdy sprawdzian 20 minut, a egzamin końcowy 120 minut.

Sprawdziany odbędą się na zajęciach **25 października** i **20 grudnia**, kolokwia na zajęciach **29 listopada** i **24 stycznia**, a egzamin **29 stycznia.**

## Plan wykładu

1. Powtórka z algebry liniowej.
2. Moduły.
3. Kwaterniony.
4. Twierdzenia Ceva'y i Menelausa.
5. Wielościany wypukłe i twierdzenie Eulera.
6. Homologia symplicjalna.
7. Własności miarowe i 3 problem Hilberta.

**Literatura**


1. J. Komorowski "Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk", PWN
2. A. Kostrikin, J. Manin "Algebra liniowa i geometria", PWN
3. A. Kostrikin "Wstęp do algebry", PWN
4. K. Borsuk, W. Szmielew "Podstawy geometrii", PWN,
5. K. Borsuk "Geometria nalityczna wielowymiarowa", PWN
6. J. Munkres, "Elements of algebraic topology", Springer

# 1 Powtórka z algebry liniowej.

## 1.1 Grupa, pierścień, ciało.

**Definicja 1.1.** *Niech $A$ będzie niepustym zbiorem.* ***Działaniem wewnętrznym*** *(lub, krótko,* ***działaniem****) w zbiorze $A$ nazywamy funkcję $*\colon A \times A \to A$.*

*Niech ponadto $B$ będzie niepustym zbiorem.* ***Działaniem zewnętrznym*** *w zbiorze $A$ przez elementy zbioru $B$ nazywamy funkcję $\diamond\colon B \times A \to A$.*

**Uwaga 1.2.** To, że w zbiorze $A$ określono działanie wewnętrzne $*$ w szczególności oznacza, że:

1. $\forall a, b \in A [*(a, b) \text{ istnieje}]$,
2. $\forall a, b \in A [*(a, b) \in A]$.

Będziemy na ogół pisali $x * y$ zamiast $*(x, y)$.

**Przykład 1.3.**

1. Dodawanie liczb naturalnych jest działaniem w $\mathbb{N}$.
2. Mnożenie liczb naturalnych jest działaniem w $\mathbb{N}$.
3. Odejmowanie i dzielenie nie są działaniami w $\mathbb{N}$.
4. Mnożenie wektorów na płaszczyźnie przez skalary rzeczywiste jest działaniem zewnętrznym.

**Definicja 1.4.** *Niech $*$ i $\circ$ będą działaniami w niepustym zbiorze $A$.*

*i.* *Działanie $*$ jest* ***łączne****, jeżeli*

$$\forall a, b, c \in A\, [a * (b * c) = (a * b) * c].$$

*ii.* *Działanie $*$ jest* ***przemienne****, jeżeli*

$$\forall a, b \in A\, [a * b = b * a].$$

*iii.* *Działanie $*$ ma* ***element neutralny*** *$e$, jeżeli istnieje element $e \in A$ taki, że*

$$\forall a \in A\, [a * e = e * a = a].$$

*iv.* *Element $b \in A$ jest* ***odwrotny*** *do $a \in A$, jeżeli $*$ ma element neutralny $e \in A$ oraz*

$$a * b = e.$$

*v.* *Działanie $\circ$ jest* ***rozdzielne względem*** *$*$, jeżeli*

$$\forall a, b, c \in A\, [a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)].$$

**Przykład 1.5.**

1. Dodawanie i mnożenie liczb naturalnych są łączne i przemienne. 0 jest elementem neutralnym dodawania, a 1 jest elementem neutralnym mnożenia. Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. 1 nie ma elementu odwrotnego względem dodawania, a 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.

2. Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb całkowitych. Każda liczba całkowita ma element odwrotny względem dodawania, ale 2 nie ma elementu odwrotnego względem mnożenia.

3. Rozważmy dodawanie i mnożenie liczb wymiernych. Każda liczba wymierna ma element odwrotny względem dodawania i każda niezerowa liczba wymierna ma element odwrotny względem mnożenia.

Z dawnych czasów, kiedy do pisania książek używano maszyn do pisania, gdzie dostępne były tylko dwa symbole do oznaczania działań, zachowały się dwie równoległe notacje i związane z nimi terminologie:

| | Notacja addytywna | Notacja multyplikatywna |
|---|---|---|
| Działanie | $+$<br>dodawanie | $\cdot$<br>mnożenie |
| Element neutralny | $0$<br>zero | $1$<br>jedynka |
| Element odwrotny | $-a$<br>element przeciwny | $a^{-1}$<br>element odwrotny |

**Definicja 1.6.**

*i.* ***Algebrą*** *nazywamy ciąg* $(A, *_1, ..., *_m, \circ_1, ..., \circ_n, B_1, ..., B_n)$, *gdzie* $A$ *jest niepustym zbiorem,* $*_1, ..., *_m$ *są działaniami w zbiorze* $A$*, zaś* $\circ_1, ..., \circ_n$ *są działaniami zewnętrznymi wraz z odpowiadającymi im zbiorami* $B_1, ..., B_n$.

*ii.* ***Grupą*** *nazywamy algebrę* $(G, *)$, *w której działania* $*$ *jest łączne, ma element neutralny* $e$ *i każdy element ma element odwrotny.*

*Jeżeli działanie* $*$ *jest dodatkowo przemienne, to grupę* $G$ *nazywamy* ***przemienną*** *(lub* ***abelową****).*

*iii.* ***Pierścieniem*** *nazywamy algebę* $(R, +, \cdot)$, *w której* $(R, +)$ *jest grupą przemienną z elementem neutralnym* $0$*, zaś* $\cdot$ *jest łączne i rozdzielne względem* $+$.

*Jeżeli działanie* $\cdot$ *jest dodatkowo przemienne, to pierścień* $R$ *nazywamy* ***pierścieniem przemiennym****.*

*Jeżeli działanie* $\cdot$ *ma element neutralny* $1$*, to pierścień* $R$ *nazywamy* ***pierścieniem z jedynką.***

*Na tym wykładzie ograniczymy się wyłącznie do pierścieni przemiennych z jedynką, które będziemy nazywali krótko pierścieniami.*

*iv.* ***Ciałem*** *nazywamy pierścień przemienny z jedynką* $(F, +, \cdot)$, *w którym* $0 \neq 1$ *oraz każdy element* $\neq 0$ *ma element odwrotny względem działania* $\cdot$.

**Przykład 1.7.**

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ są grupami przemiennymi.

   $(\mathbb{N}, +)$ nie jest grupą.

   $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ są grupami przemiennymi, gdzie $A^\times = A \setminus \{0\}$.

   $(\mathbb{N}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{Z}^\times, \cdot)$ nie są grupami.

2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ są pierścieniami.

3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ są ciałami.

   $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie jest ciałem.

**Definicja 1.8.** *Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n$ definiujemy działanie* ***dodawania modulo $n$****:*

$$a \oplus_n b = a + b \pmod n = \textit{reszta z dzielenia } a + b \textit{ przez } n$$

*oraz* ***mnożenia modulo $n$****:*

$$a \otimes_n b = a \cdot b \pmod n = \textit{reszta z dzielenia } a \cdot b \textit{ przez } n.$$

**Twierdzenie 1.9.** *Niech $n \in \mathbb{N}$.*

1. $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n)$ *jest grupą przemienną.*
2. $(\mathbb{Z}_p, \otimes_p)$ *jest grupą przemienną, o ile $p$ jest liczbą pierwszą.*
3. $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ *jest pierścieniem.*
4. $(\mathbb{Z}_p, \oplus_p, \otimes_p)$ *jest ciałem, o ile $p$ jest liczbą pierwszą.*

**Definicja 1.10.** ***Liczbami zespolonymi*** *nazywamy punkty na płaszczyźnie* $\mathbb{R}^2$*, którą będziemy oznaczać przez* $\mathbb{C}$*. Punkt o współrzędnych* $(a, b)$ *będziemy oznaczali przez* $a + bi$*. Liczbę* $a$ *nazywamy* ***częścią rzeczywistą*** *liczby zespolonej* $z = a + bi$ *i oznaczamy przez* $\mathfrak{Re}(z)$*, zaś liczbę* $b$ *nazywamy* ***częścią urojoną*** *i oznaczamy* $\mathfrak{Im}(z)$*.*

*W zbiorze* $\mathbb{C}$ *definiujemy działanie* ***dodawania liczb zespolonych****:*

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

*oraz* ***mnożenia liczb zespolonych:***

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

**Uwaga 1.11.** Liczby zespolone dodajemy i mnożymy tak, jak zwykłe wyrażenia algebraiczne, przyjmując $i = \sqrt{-1}$.

W szczególności **dzielenie liczb zespolonych** nie różni się niczym od usuwania niewymierności z mianownika, zaś liczbę zespoloną $a - bi$ nazywamy liczbą **sprzężoną** do liczby $z = a + bi$ i oznaczamy $\bar{z}$.

**Twierdzenie 1.12.** *Liczby zespolone* $\mathbb{C}$ *wraz z działaniami dodawania i mnożenia liczb zespolonych tworzą ciało.*

## 1.2 Przestrzenie wektorowe.

**Definicja 1.13.** ***Przestrzenią wektorową*** *nad ciałem* $F$ *(*$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$*...) nazywamy zbiór* ***wektorów*** $V$ *wraz z działaniami* ***dodawania wektorów*** $+ \colon V \times V \to V$ *i* ***mnożenia wektorów przez skalar*** $\cdot \colon F \times V \to V$ *spełniających następujące warkunki:*

*i.* $\forall v, w \in V \, [v + w = w + v]$;

*ii.* $\forall u, v, w \in V \, [u + (v + w) = (u + v) + w]$;

*iii.* $\exists 0 \in V \forall v \in V \, [0 + v = v]$;

*iv.* $\forall v \in V \exists -v \in V \, [v + (-v) = 0]$;

*v.* $\forall a \in F \forall v, w \in V \, [a(v + w) = av + aw]$;

*vi.* $\forall a, b \in F \forall v \in V \, [(a + b)v = av + bv]$;

*vii.* $\forall a, b \in F \forall v \in V \, [(ab)v = a(bv)]$.

**Przykład 1.14.** Przestrzeń współrzędnych $F^n$.

**Przykład 1.15.** Przestrzeń macierzy $F^n_m$.

**Przykład 1.16.** Przestrzeń funkcji ciągłych $C[a, b]$.

**Przykład 1.17.** Przestrzen wielomianów stopnia mniejszego niż $n$ $F_n[x]$.

**Definicja 1.18.** ***Podprzestrzenią*** *przestrzeni wektorowej* $V$ *nazywamy podzbiór* $U \subseteq V$ *taki, że:*

*i.* $\forall a \in F \forall u \in U \, [au \in U]$;

*ii.* $\forall u, v \in U \, [u + v \in U]$.

*Oznaczamy* $U < V$.

**Przykład 1.19.** Niech $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, x_1 = x_2 \right\}$. Wówczas $U < \mathbb{R}^3$.

**Przykład 1.20.** Niech $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2 | \, a_{12} = -a_{21} \right\}$. Wówczas $U < \mathbb{C}^3$.

**Przykład 1.21.** Niech $U = \{ f \in \mathbb{R}_n[x] | \, f(0) = 0 \}$. Wówczas $U < \mathbb{R}_3[x]$.

**Przykład 1.22.** Niech $U = C^n[a,b]$ tzn. $U = \{ f \in C[a,b] | \, \exists f^{(n)} \}$. Wówczas $U < C[a,b]$.

**Definicja 1.23.** *Niech* $V$ *będzie przestrzenią wektorową nad ciałem* $F$*, niech* $v_1, \dots, v_n \in V$*, niech* $a_1, \dots, a_n \in F$*. Wektor*

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

*nazywamy* ***kombinacją liniową*** *wektorów* $v_1, \dots, v_n$*. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów* $v_1, \dots, v_n$ *oznaczamy przez* $\mathrm{lin}(v_1, \dots, v_n)$*.*

**Przykład 1.24.** Niech $F$ będzie dowolnym ciałem, niech

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

Wówczas $F^n = \operatorname{lin}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

**Przykład 1.25.** Niech $F$ będzie dowolym ciałem. Wówczas $F_n[x] = \operatorname{lin}(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$.

**Stwierdzenie 1.26.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową, niech $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wówczas $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n) < V$.*

**Definicja 1.27.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową, niech $U < V$. Jeżeli dla pewnych $v_1, \ldots, v_n \in V$*

$$U = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n),$$

*to $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nazywamy **zbiorem generatorów** podprzestrzeni $U$, zaś $U$ podprzestrzenią **generowaną** przez wektory $v_1, \ldots, v_n$.*

**Definicja 1.28.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $F$. Wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ są* ***liniowo niezależne****, jeżeli dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n \in F$ jeśli*

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$$

*to*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

*W przeciwnym razie wektory $v_1, \ldots, v_n$ są* ***liniowo zależne****.*

**Przykład 1.29.** Wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne.

**Przykład 1.30.** Wektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\mathbb{C}^3$ są liniowo zależne.

**Definicja 1.31.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową. Wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ tworzą **bazę** przestrzeni $V$ jeżeli*

*i.* $v_1, \ldots, v_n$ *są liniowo niezależne,*

*ii.* $V = \mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

**Przykład 1.32.** Wektory $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ tworzą bazę przestrzeni $F^n$.

**Przykład 1.33.** Wektory $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ tworzą bazę przestrzeni $F_n[x]$.

**Stwierdzenie 1.34.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową. Wówczas dowolne dwie bazy przestrzeni $V$ są równoliczne.*

**Definicja 1.35.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową. Jeżeli $V$ ma bazę złożoną z $n$ wektorów, to mówimy, że **wymiar** $V$ wynosi $n$, co oznaczamy pisząc $\dim V = n$. Jeżeli $V$ nie ma skończonej bazy, to przyjmujemy $\dim V = \infty$.*

**Przykład 1.36.** Przestrzeń $F^n$ ma wymiar $n$.

**Przykład 1.37.** Przestrzeń $F^n_m$ ma wymiar $mn$.

**Przykład 1.38.** Przestrzeń $C[a, b]$ ma wymiar $\infty$.

**Stwierdzenie 1.39.** *Niech* $V$ *będzie przestrzenią wektorową, niech* $v_1, \ldots, v_n \in V$*. Wektor* $v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$ *można jednoznacznie zapisać jako kombinację liniową wektorów* $v_1, \ldots, v_n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $v_1, \ldots, v_n$ *są liniowo niezależne.*

**Definicja 1.40.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $F$, niech $v_1, ..., v_n$ będzie bazą $V$, niech $v \in V$. Jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, ..., a_n \in F$ takie, że*

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

*nazywamy* ***współrzędnymi*** *wektora $v$ w bazie $v_1, ..., v_n$.*

**Przykład 1.41.** Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 7\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2$$

więc współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ w bazie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ to $(7,7)$.

**Przykład 1.42.** Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

więc współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ w bazie $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ to $(3,1)$.

**Stwierdzenie 1.43.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $F$, niech $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ oraz $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ będą bazami przestrzeni $V$. Niech współrzędne wektorów $w_1, \ldots, w_n$ w bazie $\mathcal{B}_1$ będą następujące:*

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & s_{11}v_1 + s_{21}v_2 \ldots + s_{n1}v_n \\ w_2 & = & s_{12}v_1 + s_{22}v_2 \ldots + s_{n2}v_n \\ & \vdots & \\ w_n & = & s_{1n}v_1 + s_{2n}v_2 \ldots + s_{nn}v_n. \end{array}$$

*Zdefiniujmy macierz $S = [s_{ij}]_{i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,n\}} \in F_n^n$:*

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Niech $v \in V$ ma w bazie $\mathcal{B}_1$ współrzędne $(x_1, \ldots, x_n)$:*

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

*Wówczas współrzędne $(y_1, \ldots, y_n)$ wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{B}_2$:*

$$v = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$$

*spełniają zależność*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

**Definicja 1.44.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $F$, niech $\mathcal{B}_1 = (v_1, ..., v_n)$ oraz $\mathcal{B}_2 = (w_1, ..., w_n)$ będą bazami przestrzeni $V$. Macierz $S$ określoną w Stwierdzeniu 1.43 nazywamy* ***macierzą przejścia*** *od bazy $\mathcal{B}_2$ do bazy $\mathcal{B}_1$.*

**Przykład 1.45.** Macierzą przejścia od bazy $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ do bazy $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ jest

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 1.3 Przekształcenia liniowe.

**Definicja 1.46.** *Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $F$. Funkję $\varphi: V \to W$ nazywamy **przekształceniem liniowym** jeżeli*

$$\forall a, b \in F \forall v, w \in V \ [\varphi(av + bw) = a\varphi(v) + b\varphi(w)].$$

**Przykład 1.47.** Funkja $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowana wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ x+y \end{bmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym.

**Przykład 1.48.** Funkcja $\varphi\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ zdefiniowana wzorem

$$\varphi(f) = 2f$$

jest przekształceniem liniowym.

**Definicja 1.49.** *Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $F$, niech $\varphi: V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Zbiór:*

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

*nazywamy **jądrem** odwzorowania $\varphi$, zaś zbiór*

$$\operatorname{Im}\varphi = \{w \in W \mid \exists v \in V\ [w = \varphi(v)]\}$$

*nazywamy **obrazem** odwzorowania $\varphi$.*

**Przykład 1.50.** Obliczymy jądro i obraz odwzorowania $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowanego wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ x+y \end{bmatrix}.$$

**Stwierdzenie 1.51.** *Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $F$, niech $\varphi\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas $\operatorname{Ker}\varphi < V$ oraz $\operatorname{Im}\varphi < W$.*

**Definicja 1.52.** *Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $F$, niech $\varphi\colon V\to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A}=(v_1,\ \ldots,\ v_n)$ będzie bazą przestrzeni $V$, zaś $\mathcal{B}=(w_1,\ \ldots,\ w_m)$ bazą przestrzeni $W$. Niech ponadto współrzędne wektorów $\varphi(v_i)$ w bazie $\mathcal{B}$ będą równe:*

$$
\begin{aligned}
\varphi(v_1) &= a_{11}w_1+a_{21}w_2+\ldots+a_{m1}w_m,\\
\varphi(v_2) &= a_{12}w_1+a_{22}w_2+\ldots+a_{m2}w_m,\\
&\vdots\\
\varphi(v_n) &= a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\ldots+a_{m1n}w_m.
\end{aligned}
$$

*Macierz $A=[a_{i\,j}]_{i\in\{1,\ldots,n\},j\in\{1,\ldots,n\}}\in F_n^n$:*

$$
A=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n}
\end{bmatrix}
$$

*nazywamy* ***macierzą odwzorowania $\varphi$ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$****.*

**Stwierdzenie 1.53.** *Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $F$, niech $\varphi\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni $V$, zaś $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ bazą przestrzeni $W$, niech $A$ będzie macierzą $\varphi$ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Jeżeli współrzędne wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{A}$ równe są $(x_1, \ldots, x_n)$, zaś współrzędne wektora $\varphi(v) \in W$ w bazie $\mathcal{B}$ równe są $(y_1, \ldots, y_m)$, to wówczas*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**Przykład 1.54.** Obliczymy macierz odwzorowania $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowanego wzorem

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \\ x+y \end{bmatrix}$$

w bazach $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

**Stwierdzenie 1.55.** *Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $F$, niech $\varphi \colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ będą bazami przestrzeni $V$, $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ bazami przestrzeni $W$, niech $A$ będzie macierzą $\varphi$ w bazach $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{B}_1$, zaś niech $B$ będzie macierzą $\varphi$ w bazach $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{B}_2$. Niech ponadto $C$ będzie macierzą przejścia od bazy $\mathcal{A}_2$ do $\mathcal{A}_1$, a $D$ macierzą przejścia od bazy $\mathcal{B}_1$ do $\mathcal{B}_2$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \arrow[r, "A"'] & \mathcal{B}_1 \arrow[d, dashed, shift left=2, "D^{-1}"] \\
\mathcal{A}_2 \arrow[u, "C"] \arrow[r, "B"'] & \mathcal{B}_2 \arrow[u, "D"]
\end{tikzcd}$$

*Wówczas*

$$B = D^{-1}AC.$$

**Wniosek 1.56.** *Niech $V$ będzie przestrzenią wektorową, niech $\varphi\colon V\to V$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $V$, niech $A$ będzie macierzą $\varphi$ w bazie $\mathcal{A}$, zaś niech $B$ będzie macierzą $\varphi$ w bazie $\mathcal{B}$. Niech ponadto $C$ będzie macierzą przejścia od bazy $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "A"'] & \mathcal{A} \arrow[d, dashed, shift left=2, "C^{-1}"] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "C"] \arrow[r, "B"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "C"]
\end{tikzcd}$$

*Wówczas*

$$B = C^{-1}AC.$$

**Definicja 1.57.** *Niech $F$ będzie ciałem, niech $A, B \in F_n^n$ będą dwiema kwadratowymi macierzami. Macierze te nazywamy* ***podobnymi****, jeżeli istnieje nieosobliwa macierz $C \in F_n^n$ taka, że*

$$B = C^{-1}AC.$$

## 1.4 Wartości własne i wektory własne.

**Definicja 1.58.** *Niech $F$ będzie dowolnym ciałem i niech $A \in F_n^n$. **Wartością własną** macierzy $A$ nazywamy skalar $\lambda \in F$ taki, że dla pewnego wektora $v \in F^n$:*

$$Av = \lambda v.$$

*Wektor $v$ nazywamy odpowiadającym wartości własnej $\lambda$ **wektorem własnym** macierzy $A$.*

**Stwierdzenie 1.59.** *Niech $F$ będzie dowolnym ciałem i niech $A \in F_n^n$. Wówczas $\lambda \in F$ jest wartością własną macierzy $A$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem* ***wielomianu charakterystycznego*** *macierzy $A$:*

$$\chi_A(x) = \det(A - x \cdot I_n)$$

**Przykład 1.60.** Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definicja 1.61.** *Niech $F$ będzie dowolnym ciałem, niech $A \in F_n^n$. Macierz $A$ nazywamy* ***diagonalizowalną****, jeżeli istnieje nieosobliwa macierz $X$ taka, że macierz*

$$X^{-1}AX$$

*jest diagonalna.*

**Stwierdzenie 1.62.** *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

**Wniosek 1.63.** *Macierz $A \in F_n^n$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma $n$ liniowo niezależnych wektorów własnych.*

**Przykład 1.64.** Sprawdzić, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna.