

ZESTAW ZADAŃ 9: MORFIZMY

- (1) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C \in Ob(\mathcal{C})$, niech 0 będzie obiektem zerowym. Pokazać, że wówczas:
- (a) jednoznacznie wyznaczony morfizm $0 \rightarrow C$ jest monomorfizmem kategorijskim;
 - (b) jednoznacznie wyznaczony morfizm $C \rightarrow 0$ jest epimorfizmem kategorijskim.
- (2) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $B \xrightarrow{f_i} A_i$ są morfizmami w kategorii $\mathcal{C}$, $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $Hom((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$g_i \circ h = f_i.$$

Pokazać, że wówczas produkt $\prod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt końcowy

$(\prod_{i \in I} A_i, \{\pi_i : i \in I\})$ w kategorii $\mathcal{D}$.

- (3) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $A_i \xrightarrow{f_i} B$ są morfizmami w kategorii $\mathcal{C}$, $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $Hom((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$h \circ f_i = g_i.$$

Pokazać, że wówczas koprodukt $\coprod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt

$(\coprod_{i \in I} A_i, \{\iota_i : i \in I\})$ w kategorii $\mathcal{D}$.

- (4) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$, niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary (B, g) , gdzie $g : X \rightarrow B$ są funkcjami między zbiorami, zaś morfizmy z klasy $Hom((B, g), (C, h))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{\phi} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$\phi \circ g = h.$$

Pokazać, że wówczas F jest obiektem wolnym w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy (F, f) w kategorii $\mathcal{D}$.

- (5) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightleftharpoons[f]{g} D$ będą morfizmami, niech (E, e) będzie ekwalizatorem, a (Q, q) koekwalizatorem pary f, g . Pokazać, że wówczas:
- (a) e jest monomorfizmem kategorijskim;
 - (b) q jest epimorfizmem kategorijskim.

- (6) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Pokazać, że wówczas:
- (a) $\ker f$ jest monomorfizmem oraz $f \circ \ker f = 0_{\ker f, D}$;
 - (b) $\operatorname{coker} f$ jest epimorfizmem oraz $\operatorname{coker} f \circ f = 0_{C, \operatorname{coker} f}$.
- (7) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Pokazać, że wówczas w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją koprodukty binarne i koekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej puszauty.

- (8) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będą morfizmami. **Obrazem** f nazywamy parę (I, m) składającą się z obiektu I oraz monomorfizmu m takich, że:

- (a) istnieje morfizm $C \xrightarrow{e} I$ taki, że $f = m \circ e$;
- (b) dla dowolnego obiektu I' oraz morfizmu $C \rightarrow e'I'$ i dla każdego monomorfizmu $I' \xrightarrow{m'} D$ takiego, że $f = m' \circ e'$, istnieje dokładnie jeden morfizm $I \xrightarrow{v} I'$ taki, że $m = m' \circ v$.

Obiekt I oznaczamy przez $\text{Im}(f)$ zaś morfizm i przez $\text{im}(f)$.

Pokazać, że w kategorii $\mathcal{Set}$ dla morfizmu $C \xrightarrow{f} D$ para złożona z teorii mnogościowego obrazu odwzorowania f wraz z inkluzją tworzy obraz.

- (9) Pokazać, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma wszystkie ekwalizatory, to morfizm e w rozkładzie $f = m \circ e$ w definicji obrazu jest epimorfizmem.
- (10) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. **Koobrazem** f nazywamy parę (J, c) złożoną z obiektu J oraz epimorfizmu $C \xrightarrow{c} J$ takich, że:

- (a) istnieje morfizm $J \xrightarrow{d} D$ taki, że $f = d \circ c$;
- (b) dla dowolnego obiektu J' oraz morfizmu $J' \rightarrow d'D$ i dla każdego epimorfizmu $C \xrightarrow{c'} J'$ takiego, że $f = d' \circ c'$, istnieje dokładnie jeden morfizm $J' \xrightarrow{u} J$ taki, że $c = u \circ c'$.

Obiekt J oznaczamy przez $\text{Coim}(f)$ zaś morfizm c przez $\text{coim}(f)$.

Pokazać, że w kategorii $\mathcal{Ab}$ dla morfizmu $C \xrightarrow{f} D$ para złożona z grupy $C/\text{Ker}(f)$ wraz z epimorfizmem kanonicznym tworzy koobraz.