

ZESTAW ZADAŃ 7: PRZESTRZENIE WEKTOROWE I WYMIAR

- (1) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad pierścieniem z dzieleniem D , niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich podprzestrzeni V częściowo uporządkowanym przez relację inkluzji.
 - (a) Pokazać, że $\mathcal{S}$ jest kratą zupełną.
 - (b) Pokazać, że $\mathcal{S}$ jest kratą komplementarną.
 - (c) Pokazać, że $\mathcal{S}$ jest kratą modularną.
- (2) Pokazać, że jeśli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad pierścieniem z dzieleniem D oraz

$$V^m = \underbrace{V \oplus V \oplus \dots \oplus V}_m,$$

to wówczas, dla wszelkich $m \geq 1$, V^m jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową oraz $\dim V^m = m \cdot \dim V$.

- (3) Pokazać, że jeśli F_1 oraz F_2 są modułami wolnymi nad pierścieniem o własności niezmiennika bazowego, to wówczas $\text{rank}(F_1 \oplus F_2) = \text{rank} F_1 \oplus \text{rank} F_2$.
- (4) Niech R będzie pierścieniem bez dzielników zera i takim, że dla wszelkich $r, s \in R$ istnieją $a, b \in R$, z których przynajmniej jeden jest różny od zera, takie, że $ar + bs = 0$.
 - (a) Pokazać, że jeśli $R = K \oplus L$, dla pewnych podmodułów K oraz L lewego R -modułu R , to wtedy $K = 0$ lub $L = 0$.
 - (b) Pokazać, że jeśli R ma 1, to wtedy R ma własność niezmiennika bazowego.
- (5) Niech $f : V \rightarrow V'$ będzie przekształceniem liniowym skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych V i V' nad pierścieniem z dzieleniem D takich, że $\dim V = \dim V'$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) f jest izomorfizmem,
 - (b) f jest epimorfizmem,
 - (c) f jest monomorfizmem.
- (6) Pokazać, że dowolny pierścień lokalny (tzn. taki, że zawiera dokładnie jeden lewy ideał maksymalny $\mathfrak{M}$) z jedynką ma własność niezmiennika bazowego.
- (7) Pokazać, że dowolny pierścień skończony ma własność niezmiennika bazowego.

Zadanie domowe: Zadania 5, 6 i 7 należy oddać na następnych zajęciach.