

ZESTAW ZADAŃ 6: MODUŁY WOLNE NAD DOWOLNYMI PIERŚCIENIAMI

Na wykładzie zajmowaliśmy się modułami wolnymi w kategorii modułów unitarnych nad pierścieniami z jedyneką. Obecnie "poprawimy" tę konstrukcję na dowolne pierścienie.

Niech R będzie dowolnym pierścieniem (być może bez jedynek) i niech X będzie niepustym zbiorem. W tym zestawie zadań R -moduł F będzie się nazywał **wolny**, jeżeli jest obiektem wolnym na X w kategorii wszystkich lewych R -modułów, lub, innymi słowy, jeśli spełnia następującą własność uniwersalną:

Dla dowolnego lewego R -modułu A oraz funkcji $f : X \rightarrow A$, istnieje dokładnie jeden homomorfizm R -modułów $\bar{f} : F \rightarrow A$ taki, że $\bar{f} \circ \iota = f$.

- (1) Niech $\{X_i \mid i \in I\}$ będzie rodziną parami rozłącznych zbiorów i niech dla każdego $i \in I$ niech F_i będzie modułem wolnym na X_i wraz z $\iota_i : X_i \rightarrow F_i$. Niech $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ oraz $F = \sum_{i \in I} F_i$ wraz z kanoniczną injekcją $\phi_i : F_i \rightarrow F$. Zdefiniujmy $\iota : X \rightarrow F$ wzorem $\iota(x) = \phi_i \circ \iota_i(x)$ dla $x \in X_i$ (zauważmy, że ι jest dobrze zdefiniowana, jako że X_i są parami rozłączne). Udowodnij, że F jest modułem wolnym na X .
- (2) Udowodnij, że jeśli R jest dowolnym pierścieniem, zaś X jest dowolnym zbiorem, to wówczas istnieje moduł wolny na zbiorze X . (*Wskazówka:* jako że X jest rozłączną sumą zbiorów $\{t\}$, $t \in X$, wobec poprzedniego zadania wystarczy założyć, że X ma tylko jeden element.)

Zadanie domowe: Zadania 1 i 2 należy rozwiązać na następne zajęcia.