

9. WYKŁAD 9: KATEGORIE: PRODUKTY, KOPRODUKTY, OBIEKTY WOLNE, MONOMORFIZMY I EPIMORFIZMY.

Definicja 9.1. *Kategoria $\mathcal{C}$ składa się z klasy obiektów $Ob(\mathcal{C})$, oznaczanych przez $A, B, C, \dots$ oraz klasy morfizmów (lub strzałek) $Ar(\mathcal{C})$ wraz z:*

- (1) *klasą parami rozłącznych klas $Hom(A, B)$, jednym dla każdej pary obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{C})$; element f zbioru $Hom(A, B)$ nazywamy **morfizmem** z A do B i oznaczamy $A \xrightarrow{f} B$ lub $f : A \rightarrow B$,*
- (2) *funkcjami $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, C)$, dla każdej trójki $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, zwanej **składaniem morfizmów**; dla morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$ wartości tej funkcji oznaczamy $(g, f) \mapsto g \circ f$ a morfizm $A \xrightarrow{g \circ f} C$ nazywamy **złożeniem** morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$.*

Ponadto spełnione są następujące aksjomaty:

Łączność: jeśli $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ oraz $C \xrightarrow{h} D$ są morfizmami w $\mathcal{C}$, to

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Identyczność:: dla każdego obiektu $B \in \mathcal{C}$ istnieje morfizm $B \xrightarrow{1_B} B$ taki, że dla dowolnych $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$:

$$1_B \circ f = f \text{ oraz } g \circ 1_B = g.$$

Jeżeli klasy $Ob(\mathcal{C})$ oraz $Ar(\mathcal{C})$ nie są klasami właściwymi, ale zbiorami, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **małą**. Jeśli klasy $Hom(A, B)$, dla każdej pary obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, nie są klasami właściwymi, ale zbiorami, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **lokalnie małą**.

Izomorfizmem nazywamy morfizm $A \xrightarrow{f} B$ taki, że istnieje morfizm $B \xrightarrow{g} A$ taki, że

$$f \circ g = 1_B \text{ oraz } g \circ f = 1_A.$$

Jeżeli pomiędzy dwoma obiektami istnieje izomorfizm $A \xrightarrow{f} B$, to obiekty te nazywamy **izomorficznymi** i oznaczamy $A \cong B$.

Automorfizmem nazywamy izomorfizm $A \xrightarrow{f} A$. **Endomorfizmem** nazywamy morfizm $A \xrightarrow{f} A$.

Przykłady:

- (1) Klasa $\mathcal{Set}$ wszystkich zbiorów tworzy kategorię, w której morfizmami są funkcje, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (2) Klasa $\mathcal{Grp}$ wszystkich grup tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy grup, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (3) Klasa $\mathcal{Ab}$ wszystkich grup abelowych tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy grup abelowych, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (4) Klasa $\mathcal{Rng}$ wszystkich pierścieni tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy pierścieni, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (5) Niech R będzie pierścieniem. Klasa $R - \mathcal{Mod}$ wszystkich lewych R -modułów tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy lewych R -modułów, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (6) Klasa $\mathcal{Top}$ wszystkich przestrzeni topologicznych tworzy kategorię, w której morfizmami są funkcje ciągłe, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (7) Klasa $\mathcal{Metr}$ wszystkich przestrzeni metrycznych tworzy kategorię, w której morfizmami są kontrakcje, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji; przypomnijmy, że kontrakcją przestrzeni

metrycznej (X, ρ_X) w (Y, ρ_Y) nazywamy funkcję $f : X \rightarrow Y$ taką, że

$$\forall x, y \in X [\rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_X(x, y)].$$

- (8) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas G jest kategorią, w której jedynym obiektem jest zbiór G , zaś morfizmami ze zbioru $Hom(G, G)$ wszystkie elementy grupy G , a składanie morfizmów jest mnożeniem w grupie G .
- (9) Niech $(P, \leq)$ będzie preporządkiem, tzn. zbiorem z określoną na nim relacją $\leq$, która jest zwrotna i przechodnia. Wówczas P jest kategorią, w której obiektami są elementy zbioru P , zaś zbiór morfizmów ze zbioru $Hom(a, b)$ jest co najwyżej jednoelementowy i zdefiniowany warunkiem:

$$a \rightarrow b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a \leq b.$$

Ponieważ relacja $\leq$ jest przechodnia, więc składanie morfizmów jest dobrze określone.

- (10) Niech n będzie liczbą porządkową, tzn. typem porządkowym zbioru dobrze uporządkowanego; przypomnijmy, że porządek $(P, \leq)$ jest dobry, jeżeli relacja $\leq$ jest antysymetryczna, przechodnia, zupełna i każdy niepusty podzbiór S zbioru P ma względem niej element najmniejszy, z kolei dwa porządki $(P_1, \leq_1)$ oraz $(P_2, \leq_2)$ mają ten sam typ, jeżeli istnieje bijekcja $f : P_1 \rightarrow P_2$ taka, że

$$\forall a, b \in P_1 [a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)];$$

określona w ten sposób relacja pomiędzy zbiorami uporządkowanymi jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji nazywamy typami porządkowymi. Skończoną liczbę porządkową n będziemy rozważać jako dobrze uporządkowany zbiór poprzedzających ją liczb porządkowych:

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

0 będziemy traktować jako zbiór pusty, a pierwszą nieskończoną liczbę porządkową ω (tzn. typ porządkowy zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$) będziemy utożsamiali z dobrze uporządkowanym zbiorem:

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

W szczególności każda liczba porządkowa jest kategorią. Na przykład 3 jest kategorią, w której obiektami są elementy zbioru $\{0, 1, 2\}$, zaś zbiorem morfizmów są następujące strzałki:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

wraz ze wszystkimi swoimi złożeniami. Podobnie ω jest kategorią, w której obiektami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$, zaś zbiorem morfizmów są strzałki:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

wraz ze wszystkimi swoimi złożeniami.

- (11) Klasa Ord wszystkich skończonych liczb porządkowych tworzy kategorię, w której morfizmami są funkcje zachowujące porządek, tzn., dla danych skończonych liczb porządkowych $m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ oraz $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, funkcje $f : m \rightarrow n$ takie, że

$$\forall i, j \in m [i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)].$$

Ponieważ złożenie dwóch funkcji zachowujących porządek jest funkcją zachowującą porządek, więc składanie morfizmów jest dobrze określone. Kategorię Ord , w zależności od kontekstu, oznacza się też przez Δ i nazywa kategorią sympleksu.

- (12) Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią. Klasa $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ wszystkich strzałek kategorii $\mathcal{C}$ jest kategorią, której obiektami są morfizmy kategorii $\mathcal{C}$, a morfizmy określone są następująco: jeżeli $f, g \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$, przy czym $A \xrightarrow{f} B$ oraz $C \xrightarrow{g} D$, to $\text{Hom}(f, g)$ składa się z wszystkich par (ϕ, ψ) takich, że $A \xrightarrow{\phi} C$, $B \xrightarrow{\psi} D$ oraz $\psi \circ f = g \circ \phi$; innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

jest przemienny.

- (13) Niech $\mathcal{I}$ będzie dowolną klasą. Klasa $\mathcal{I}$ jest kategorią, której obiektami są elementy klasy $\mathcal{I}$, a morfizmami odwzorowania identycznościowe. Kategoria ta nazywana jest kategorią dyskretną.

Definicja 9.2. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. **Produktem** rodziny $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy obiekt P wraz z rodziną morfizmów $\{P \xrightarrow{\pi_i} A_i : i \in I\}$ takie, że dla dowolnego obiektu B i dowolnej rodziny morfizmów $\{B \xrightarrow{\phi_i} A_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $B \xrightarrow{\phi} P$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & P \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & A_i \end{array}$$

Produkt P oznaczamy przez $\prod_{i \in I} A_i$.

Przykłady:

- (14) Produkty istnieją w kategorii Set , są nimi produkty kartezjańskie wraz z epimorfizmami kanonicznymi.
- (15) Produkty istnieją w kategorii Grp , są nimi produkty grup wraz z epimorfizmami kanonicznymi.
- (16) Produkty istnieją w kategorii Ab , są nimi produkty grup abelowych wraz z epimorfizmami kanonicznymi.
- (17) Produkty istnieją w kategorii Rng .
- (18) Produkty istnieją w kategorii $R\text{-Mod}$.
- (19) Produkty istnieją w kategorii Top .
- (20) Produkty nie istnieją w kategorii Metr .
- (21) Produkty istnieją w kategorii Ord .

Definicja 9.3. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. **Produktem** rodziny $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy obiekt S wraz z rodziną morfizmów $\{A_i \xrightarrow{\iota_i} S : i \in I\}$ takie, że dla dowolnego obiektu B i dowolnej rodziny morfizmów $\{A_i \xrightarrow{\psi_i} S : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $S \xrightarrow{\psi} B$ taki, że

$$\psi \circ \iota_i = \psi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\psi} & B \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \psi_i & \\ A_i & & \end{array}$$

Koprodukt S oznaczamy przez $\coprod_{i \in I} A_i$.

Przykłady:

- (22) Koprodukty istnieją w kategorii $\mathcal{Set}$, są nimi rozłączne sumy wraz z monomorfizmami kanonicznymi.
- (23) Koprodukty istnieją w kategorii $\mathcal{Ab}$, są nimi (zewnątrzne) sumy proste grup abelowych wraz z monomorfizmami kanonicznymi.
- (24) Koprodukty istnieją w kategorii $\mathcal{Grp}$, są nimi (zewnątrzne) iloczyny wolne grup wraz z monomorfizmami kanonicznymi.
- (25) Koprodukty istnieją w kategorii $R - \mathcal{Mod}$.

Definicja 9.4. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **kategorią konkretną**, jeżeli istnieje funkcja $\sigma : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{Set})$ taka, że

- (1) każdy morfizm $A \xrightarrow{f} B$ jest funkcją pomiędzy zbiorami $f : \sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$;
- (2) morfizm identycznościowy $A \xrightarrow{1_A} A$ jest funkcją identycznościową $1_A : \sigma(A) \rightarrow \sigma(A)$;
- (3) składanie morfizmów jest składaniem funkcji.

Jako że o funkcji σ możemy myśleć jako o utożsamieniu obiektów kategorii z odpowiadającymi im zbiorami, powyższa definicja oznacza po prostu, że kategoria konkretna jest kategorią, w której obiekty są zbiorami, a morfizmy funkcjami.

Przykłady:

- (26) Kategorie $\mathcal{Set}$, $\mathcal{Ab}$, $\mathcal{Grp}$, $R - \mathcal{Mod}$ są konkretne.
- (27) Grupa G postrzegana jako kategoria z jednym obiektem nie jest konkretna.

Definicja 9.5. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$, niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Obiekt F nazywamy **wolnym o bazie X** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego obiektu H i dowolnej funkcji zbiorów $h : X \rightarrow H$ istnieje dokładnie jeden morfizm $F \xrightarrow{\phi} H$ taki, że $\phi \circ f = h$.

Przykłady:

- (28) Obiekty wolne istnieją w kategorii $\mathcal{Grp}$, są nimi grupy wolne.
- (29) Obiekty wolne istnieją w kategorii $\mathcal{Ab}$, są nimi wolne grupy abelowe.
- (30) Obiekty wolne istnieją w kategorii modułów unitarnych nad pierścieniami z jedyneką, są nimi moduły wolne.

Definicja 9.6. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C \in Ob(\mathcal{C})$. Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **monomorfizmem kategoriowym** (lub **monikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu A i morfizmów $A \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} B$:

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **epimorfizmem kategoriowym** (lub **epikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu D i morfizmów $C \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} D$:

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

Przykłady:

- (34) Rozważmy kategorię $\mathcal{Grp}$. Wówczas morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowym homomorfizmem oraz jest epimorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjektywnym homomorfizmem.
- (35) Rozważmy kategorię $\mathcal{Rng}$. Wówczas morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowym homomorfizmem.
- (36) Rozważmy kategorię $\mathcal{R} - \mathcal{Mod}$. Wówczas morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowym homomorfizmem oraz jest epimorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjektywnym homomorfizmem.

Uwaga 9.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $B \xrightarrow{\phi} C$ i $C \xrightarrow{\psi} D$ będą morfizmami. Wówczas:

- (1) jeśli ϕ i ψ są monomorfizmami kategoriowymi, to $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategoriowym;
- (2) jeśli $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategoriowym, to ϕ jest monomorfizmem kategoriowym;
- (3) jeśli ϕ i ψ są epimorfizmami kategoriowymi, to $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategoriowym;
- (4) jeśli $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategoriowym, to ψ jest epimorfizmem kategoriowym;
- (5) jeśli ϕ jest izomorfizmem, to jest monomorfizmem kategoriowym i epimorfizmem kategoriowym.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.