

Kategorie

Kategoria $\mathcal{C}$ składa się z klasy **obiektów** $Ob(\mathcal{C})$, oznaczanych przez $A, B, C, \dots$ oraz klasy **morfizmów** (lub **strzałek**) $Ar(\mathcal{C})$ wraz z:

1. klasą parami rozłącznych klas $Hom(A, B)$, jednym dla każdej pary obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{C})$; element f zbioru $Hom(A, B)$ nazywamy **morfizmem** z A do B i oznaczamy $A \xrightarrow{f} B$ lub $f : A \rightarrow B$,
2. funkcjami $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, C)$, dla każdej trójki $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, zwanej **składaniem morfizmów**; dla morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$ wartości tej funkcji oznaczamy $(g, f) \mapsto g \circ f$ a morfizm $A \xrightarrow{g \circ f} C$ nazywamy **złożeniem** morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$.

Ponadto spełnione są następujące aksjomaty:

Łączność jeśli $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ oraz $C \xrightarrow{h} D$ są morfizmami w $\mathcal{C}$, to

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Identyczność: dla każdego obiektu $B \in \mathcal{C}$ istnieje morfizm $B \xrightarrow{1_B} B$ taki, że dla dowolnych $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$:

$$1_B \circ f = f \text{ oraz } g \circ 1_B = g.$$

Jeżeli klasy $Ob(\mathcal{C})$ oraz $Ar(\mathcal{C})$ nie są klasami właściwymi, ale zbiorami, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **małą**. Jeśli klasy $Hom(A, B)$, dla każdej pary obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, nie są klasami właściwymi, ale zbiorami, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **lokalnie małą**.

Izomorfizmem nazywamy morfizm $A \xrightarrow{f} B$ taki, że istnieje morfizm $B \xrightarrow{g} A$ taki, że

$$f \circ g = 1_B \text{ oraz } g \circ f = 1_A.$$

Jeżeli pomiędzy dwoma obiektami istnieje izomorfizm $A \xrightarrow{f} B$, to obiekty te nazywamy **izomorficznymi** i oznaczamy $A \cong B$.

Automorfizmem nazywamy izomorfizm $A \xrightarrow{f} A$.

Endomorfizmem nazywamy morfizm $A \xrightarrow{f} A$.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. **Produktem** rodziny $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy obiekt P wraz z rodziną morfizmów $\{P \xrightarrow{\pi_i} A_i : i \in I\}$ takie, że dla dowolnego obiektu B i dowolnej rodziny morfizmów $\{B \xrightarrow{\phi_i} A_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $B \xrightarrow{\phi} P$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & P \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & A_i \end{array}$$

Produkt P oznaczamy przez $\prod_{i \in I} A_i$.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. **Produktem** rodziny $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy obiekt S wraz z rodziną morfizmów $\{A_i \xrightarrow{\iota_i} S : i \in I\}$ takie, że dla dowolnego obiektu B i dowolnej rodziny morfizmów $\{A_i \xrightarrow{\psi_i} S : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $S \xrightarrow{\psi} B$ taki, że

$$\psi \circ \iota_i = \psi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\psi} & B \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \psi_i & \\ A_i & & \end{array}$$

Koprodukt S oznaczamy przez $\coprod_{i \in I} A_i$.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **kategorią konkretną**, jeżeli istnieje funkcja $\sigma : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\text{Set})$ taka, że

1. każdy morfizm $A \xrightarrow{f} B$ jest funkcją pomiędzy zbiorami $f : \sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$;
2. morfizm identycznościowy $A \xrightarrow{1_A} A$ jest funkcją identycznościową $1_A : \sigma(A) \rightarrow \sigma(A)$;
3. składanie morfizmów jest składaniem funkcji.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$, niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Obiekt F nazywamy **wolnym obiektem** X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego obiektu H i dowolnej funkcji zbiorów $h : X \rightarrow H$ istnieje dokładnie jeden morfizm $F \xrightarrow{\phi} H$ taki, że $\phi \circ f = h$.

Definicja

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **monomorfizmem kategoriowym** (lub **monikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu A i morfizmów

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{matrix} B:$$

jeśli $\phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2$ to $\psi_1 = \psi_2$.

Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **epimorfizmem kategoriowym** (lub **epikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu D i morfizmów

$$C \begin{matrix} \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_2} \end{matrix} D:$$

jeśli $\psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi$ to $\psi_1 = \psi_2$.

Uwaga

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $B \xrightarrow{\phi} C$ i $C \xrightarrow{\psi} D$ będą morfizmami. Wówczas:

1. jeśli ϕ i ψ są monomorfizmami kategorijskimi, to $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategorijskim;
2. jeśli $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategorijskim, to ϕ jest monomorfizmem kategorijskim;
3. jeśli ϕ i ψ są epimorfizmami kategorijskimi, to $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategorijskim;
4. jeśli $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategorijskim, to ψ jest epimorfizmem kategorijskim;
5. jeśli ϕ jest izomorfizmem, to jest monomorfizmem kategorijskim i epimorfizmem kategorijskim.