

Przestrzenie wektorowe i wymiar

Definicja

*Niech D będzie pierścieniem z dzieleniem. Lewy unitarny D -moduł V nazywamy **przestrzenią wektorową**.*

Lemat

Maksymalny liniowo niezależny podzbiór X przestrzeni wektorowej V nad pierścieniem z dzieleniem D jest bazą V .

Twierdzenie

Każda przestrzeń wektorowa V nad pierścieniem z dzieleniem D jest D -modułem wolnym.

Twierdzenie

Każdy zbiór generatorów przestrzeni wektorowej nad pierścieniem z dzieleniem D zawiera bazę.

Lemat

Niech R będzie pierścieniem z 1 i niech F będzie R -modulem wolnym z nieskończoną bazą X . Wówczas każda baza F jest tej samej mocy co X .

Twierdzenie

Jeżeli V jest przestrzenią wektorową nad pierścieniem z dzieleniem D , to dowolne dwie bazy V są tej samej mocy.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem z jedynką takim, że dla dowolnego R -modułu wolnego F dowolne dwie bazy F są tej samej mocy.
*Wówczas mówimy, że R ma **własność niezmiennika bazowego**.*

Lemat

Niech R będzie pierścieniem z jedynką, I ideałem pierścienia R , F lewym R -modulem wolnym z bazą X oraz niech $\kappa : F \rightarrow F/IF$ będzie kanonicznym epimorfizmem. Wówczas F/IF jest R/I -modulem wolnym z bazą $\kappa(X)$ oraz $|\kappa(X)| = |X|$.

Lemat

Niech $f : R \rightarrow S$ będzie niezerowym epimorfizmem pierścieni z jedynekami. Jeśli S ma własność niezmiennika bazowego, to ma go również R .

Twierdzenie

Dowolny pierścień przemienny z jedyneką ma własność niezmiennika bazowego.