

Wolne grupy abelowe

Definition

*Grupę abelową $(F, +)$ nazywamy **wolną grupą abelową**, gdy $F = \sum_{i \in I} \langle f_i \rangle$, gdzie $r(f_i) = +\infty$, $i \in I$. Rodzinę $\{f_i : i \in I\}$ nazywamy **bazą** (lub **zbiorem wolnych generatorów**) wolnej grupy abelowej F .*

Theorem

1. *Niech F będzie wolną grupą abelową z bazą $\{f_i : i \in I\}$.
Każdy element $f \in F$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci*

$$f = \sum_{i \in I} x_i f_i,$$

gdzie $x_i \in \mathbb{Z}$ oraz $x_i = 0$ dla prawie wszystkich $i \in I$.

2. *Istnieje wolna grupa abelowa o bazie dowolnej mocy.*
3. *Każde dwie wolne grupy abelowe o bazach równej mocy są izomorficzne.*

Theorem

Dowolne dwie bazy wolnej grupy abelowej są tej samej mocy.

Definition

*Niech F będzie wolną grupą abelową. Moc dowolnej jej bazy nazywamy **rangą** wolnej grupy abelowej i oznaczamy $\text{rank } F$.*

Corollary

Dowolne dwie wolne grupy abelowe są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe rangi.

Theorem (własność uniwersalna wolnych grup abelowych)

Niech $(F, +)$ będzie grupą abelową. Wówczas F jest wolną grupą abelową o bazie $\{f_i : i \in I\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej grupy abelowej H i jej rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : F \rightarrow H$ taki, że $h(f_i) = h_i$.

Theorem

Każda grupa abelowa jest homomorficznym obrazem pewnej wolnej grupy abelowej.

Moduły wolne

Definition

Niech R będzie pierścieniem z jedynką. Lewy unitarny R -moduł M nazywamy **modułem wolnym**, gdy $M = \sum_{i \in I} \langle f_i \rangle$, gdzie $\langle f_i \rangle \cong R$, $i \in I$. Rodzinę $\{f_i : i \in I\}$ nazywamy **bazą** (lub **zbiorem wolnych generatorów**) modułu wolnego M .

Theorem

Niech R będzie pierścieniem z jedynką.

- 1. Niech M będzie lewym R -modułem wolnym z bazą $\{f_i : i \in I\}$. Każdy element $f \in M$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci*

$$f = \sum_{i \in I} x_i f_i,$$

gdzie $x_i \in R$ oraz $x_i = 0$ dla prawie wszystkich $i \in I$.

- 2. Istnieje R -moduł wolny o bazie dowolnej mocy.*

Theorem (własność uniwersalna modułów wolnych)

Niech R będzie pierścieniem z jedyneką. Niech M będzie lewym unitarnym R -modułem. Wówczas M jest modułem wolnym o bazie $\{f_i : i \in I\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego lewego unitarnego R -modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \rightarrow N$ taki, że $h(f_i) = h_i$.

Theorem

Niech R będzie pierścieniem, niech K będzie lewym R -modułem. Wówczas K jest homomorficznym obrazem pewnego lewego R modułu M o następującej własności:

istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R -modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \rightarrow N$ taki, że $h(f_i) = h_i$.

Corollary

Niech R będzie pierścieniem z jedyneką. Każdy lewy unitarny R -moduł jest homomorficznym obrazem pewnego R -modułu wolnego.