

Rozszczepialne ciągi dokładne.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem. Podmoduł N modułu M nazywamy **składnikiem prostym**, jeżeli $M = N \oplus K$ dla pewnego podmodułu K .

Ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

nazywamy **ciągami rozszczepialnymi**, gdy podmoduł $\operatorname{im} f$ jest składnikiem prostym M_2 .

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, niech ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

będzie dokładny. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. ciąg $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest rozszczepialny,
2. istnieje homomorfizm $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ taki, że $\bar{f} \circ f = id_{M_1}$,
3. istnieje homomorfizm $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ taki, że $g \circ \bar{g} = id_{M_3}$.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem. Ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $\bar{f} : M_2 \rightarrow M_1$ oraz $\bar{g} : M_3 \rightarrow M_2$ takie, że

1. $\bar{f} \circ f = id_{M_1}$, $g \circ \bar{g} = id_{M_3}$,
2. $g \circ f = 0_{M_3}$, $\bar{f} \circ \bar{g} = 0_{M_1}$,
3. $f \circ \bar{f} + \bar{g} \circ g = id_{M_2}$.

Wniosek

Niech R będzie pierścieniem, $M, M_1, \dots, M_n$ lewymi R -modułami. Wówczas $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $f_i : M_i \rightarrow M$ oraz $g_i : M \rightarrow M_i$ takie, że

1. $g_i \circ f_i = id_{M_i}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$,
2. $g_i \circ f_j = 0_{M_i}$, dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$,
3. $f_1 \circ g_1 + \dots + f_n \circ g_n = id_M$.

Wniosek

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, N podmodułem modułu M , a $\kappa : M \rightarrow M/N$ epimorfizmem kanonicznym danym wzorem

$$\kappa(m) = m + N.$$

Wówczas M/N jest składnikiem prostym M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $h : M/N \rightarrow M$ taki, że $\kappa \circ h = id_{M/N}$.