

Produkty grup.

Produkty i koprodukty grup
abelowych.

Produkty i koprodukty modułów.

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$. Następujące warunki są równoważne:

1. $G = H_1 H_2$ oraz $H_1 \cap H_2 = \{1\}$,
2. każdy element $g \in G$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_1 h_2,$$

gdzie $h_1 \in H_1$ oraz $h_2 \in H_2$.

Oznaczenie:

Gdy $(G, +)$ zapisana jest w notacji addytywnej, piszemy $H_1 + H_2$ zamiast $H_1 H_2$.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$.

1. G jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym podgrup H_1 i H_2 , gdy spełnia jeden (a więc wszystkie) warunki Uwagi ??.
2. G jest słabym iloczynem (sumą) półprostym wewnętrznym podgrup H_1 i H_2 , gdy jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz $H_1 \triangleleft G$ lub $H_2 \triangleleft G$.
3. G jest słabym iloczynem (sumą) prostym wewnętrznym podgrup H_1 i H_2 , gdy jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz $H_1 \triangleleft G$ i $H_2 \triangleleft G$.

Przykłady:

1. Rozważmy grupę $D(n)$. Niech $Obr(n)$ oznacza grupę obrotów, a $Odb(n)$ dowolną dwuelementową grupę generowaną przez odbicie. Wówczas $D(n) = Obr(n) \cdot Odb(n)$ jest słabym iloczynem półprostym wewnętrznym, ale nie jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym.
2. Rozważmy grupę abelową $(A, \cdot)$. Każda podgrupa grupy abelowej jest normalna, a więc
$$A \text{ jest słabym iloczynem wewnętrznym} \Leftrightarrow A \text{ jest słabym iloczynem półprostym wewnętrznym} \Leftrightarrow A \text{ jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym.}$$

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$. Następujące warunki są równoważne:

1. odwzorowanie $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow G$ dane wzorem $\phi(h_1, h_2) = h_1 h_2$ jest izomorfizmem;
2. $G = H_1 H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ oraz $\forall h_1 \in H_1 \forall h_2 \in H_2 (h_1 h_2 = h_2 h_1)$;
3. G jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym podgrup H_1 i H_2 .

Definicja

Niech H_1, H_2 będą grupami. Grupę $H_1 \times H_2$ nazywamy **iloczynem (sumą) prostym zewnętrznym grup H_1 i H_2** .

Oznaczenie:

Gdy H_1 i H_2 zapisane są w notacji addytywnej, piszemy $H_1 \oplus H_2$ zamiast $H_1 \times H_2$. Ze względu na izomorfizm z Uwagi ??, będziemy na ogół mówić po prostu o iloczynach (sumach) prostych, bez rozróżniania między słabymi iloczynami (sumami) prostymi wewnętrznymi a iloczynami (sumami) prostymi zewnętrznymi. Opisane konstrukcje w naturalny sposób przenoszą się na dowolną skończoną liczbę grup. W ten sposób mówimy o iloczynach (sumach) prostych grup $H_1, \dots, H_n$, które oznaczać będziemy przez $H_1 \times \dots \times H_n$, lub $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ w notacji addytywnej.

Konstrukcje te przenoszą się także na nieskończoną liczbę grup. Zobaczymy, że w tym przypadku słabe iloczyny (sumy) i iloczyny (sumy) na ogół różnią się od siebie.

Definicja i uwaga

Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{G_i : i \in I\}$.

Jeżeli $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$, to iloczyn $f \cdot g$ definiujemy jako funkcję $f \cdot g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$ daną wzorem

$$f \cdot g(i) = f(i)g(i).$$

$(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$ jest grupą, którą nazywamy **iloczynem prostym zewnętrznym** lub, krótko, **produktem grup**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i$ wzorem

$$\pi_i(a) = a(i),$$

dla $i \in I$. π_i , $i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami grup, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

Definicja i uwaga:

Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{G_i : i \in I\}$. W zbiorze $\prod_{i \in I} G_i$ rozpatrzmy podzbiór

$$\prod_{i \in I}^w G_i = \{f \in \prod_{i \in I} G_i : f(i) = 1_{G_i} \text{ dla prawie wszystkich } i \in I\}.$$

Iloczyn $f \cdot g$, dla $f, g \in \prod_{i \in I}^w G_i$ definiujemy jak w grupie $\prod_{i \in I} G_i$. $(\prod_{i \in I}^w G_i, \cdot)$ jest grupą, którą nazywamy **słabym iloczynem prostym zewnętrznym**. W przypadku, gdy grupy G_i , $i \in I$, są abelowe, piszemy na ogół $\prod_{i \in I} G_i$ i słaby iloczyn prosty zewnętrzny nazywamy **koproduktem grup abelowych**, a w przypadku, gdy G_i , $i \in I$, są abelowe i zapisane w notacji addytywnej, piszemy na ogół $\sum_{i \in I} G_i$ i koproduct grup abelowych nazywamy **sumą grup abelowych**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : G_i \rightarrow \coprod_{i \in I}^w G_i$ wzorem

$$\iota_i(a) = \bar{a}, \text{ gdzie } \bar{a}(j) = \begin{cases} a, & \text{gdy } j = i, \\ 1_{G_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. $\iota_i, i \in I$, są dobrze określonymi monomorfizmami grup, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

Uwaga

Oczywiście w przypadku, gdy I jest zbiorem skończonym $\prod_{i \in I} G_i = \coprod_{i \in I}^w G_i$. Uzasadnia to terminologię przyjętą w Definicji ??.

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup G .

Następujące warunki są równoważne:

1. $G = \coprod_{i \in I}^w G_i$,
2. każdy element $g \in G \setminus \{1\}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n},$$

gdzie $i_1, \dots, i_n$ są różnymi elementami zbioru I oraz $h_{i_k} \neq 1$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup G .

Wówczas, jeżeli

1. $G = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$ oraz
2. dla każdego $k \in I$, $N_k \cap \langle \bigcup_{i \in I \setminus \{k\}} H_i \rangle$,

to $G \cong \coprod_{i \in I}^w H_i$.

Uwaga

Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup.
Wówczas:

1. $\coprod_{i \in I}^w G_i \triangleleft \prod_{i \in I} G_i$;
2. $\iota_i(G_i) \triangleleft \coprod_{i \in I} G_i$, dla każdego $i \in I$.

Twierdzenie

Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup (lub grup abelowych), H pewną grupą (lub grupą abelową), niech $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & \prod_{i \in I} G_i \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & G_i \end{array}$$

Ponadto jeśli grupa (lub grupa abelowa) G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \prod_{i \in I} G_i$.

Twierdzenie

Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup abelowych, H pewną grupą abelową, niech $\{\phi_i : G_i \rightarrow H : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow H$ taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} G_i & \xrightarrow{\phi} & H \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ G_i & & \end{array}$$

Ponadto jeśli grupa abelowa G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \coprod_{i \in I} G_i$.

Definicja i uwaga

Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R -modułów, niech $\prod_{i \in I} M_i$ będzie produktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \prod_{i \in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ daną wzorem

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

$(\prod_{i \in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R -modulem, który nazywamy **produktem modułów**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_i$ wzorem

$$\pi_i(m) = m(i),$$

dla $i \in I$. π_i , $i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami modułów, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

Definicja i uwaga

Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R -modułów, niech $\sum_{i \in I} M_i$ będzie koproduktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \sum_{i \in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ daną wzorem

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

$(\sum_{i \in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R -modulem, który nazywamy **koproduktem (lub sumą) modułów**.

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : M_i \rightarrow \sum_{i \in I}^w M_i$ wzorem

$$\iota_i(m) = \overline{m}, \text{ gdzie } \overline{m}(j) = \begin{cases} m, & \text{gdy } j = i, \\ 0_{M_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. $\iota_i, i \in I$, są dobrze określonymi monomorfizmami modułów, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów, N pewnym lewym R -modulem, niech $\{\phi_i : N \rightarrow M_i : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów modułów. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\phi} & \prod_{i \in I} M_i \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & M_i \end{array}$$

Ponadto jeśli moduł M ma powyższą własność, to wówczas $M \cong \prod_{i \in I} M_i$.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów, N pewnym lewym R -modulem, niech $\{\phi_i : M_i \rightarrow N : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów modułów. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \sum_{i \in I} M_i \rightarrow N$ taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i \in I} M_i & \xrightarrow{\phi} & N \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ M_i & & \end{array}$$

Ponadto jeśli moduł M ma powyższą własność, to wówczas $M \cong \sum_{i \in I} M_i$.

Uwaga

Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ będzie skończoną rodziną lewych R -modułów. Wówczas

$\prod_{i=1}^n M_i \cong \sum_{i=1}^n M_i$ i stosujemy oznaczenie $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$.