

Ciągi dokładne.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem. Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów:

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

nazywamy **ciągami dokładnymi w członie M_i** , jeśli $\operatorname{im} g_{i-1} = \ker g_i$. Ciąg nazywamy **ciągami dokładnymi**, gdy jest dokładny w każdym członie.

Uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M_1, M_2, M_3 lewymi R -modułami.

Wówczas:

1. $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowy;
2. $M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy g jest surjektywny;
3. $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowy, g jest surjektywny i $\ker g = \operatorname{im} f$, przy czym ostatni warunek można zastąpić warunkiem orzekającym, że g indukuje izomorfizm $M_2/\operatorname{im} f \cong M_3$.

Uwaga

*Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami.
Wówczas $\text{Hom}_R(M, N)$ jest grupą przemenną.*

Twierdzenie:

Niech R będzie pierścieniem.

1. Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu N ciąg:

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N)$ i $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$ dane są wzorami

$$\bar{g}(\phi) = \phi \circ g \text{ oraz } \bar{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

2. Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu M ciąg:

$$\operatorname{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M, N_3) \rightarrow 0$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_2)$ i $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(M, N_2) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_3)$ dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

Twierdzenie:

Niech R będzie pierścieniem.

1. Jeżeli w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \\ N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $w : M_3 \rightarrow N_3$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

jest przemienny.

2. Jeżeli w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_1 \rightarrow N_1$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 \end{array}$$

jest przemienny.

Twierdzenie (lemat o pięciu modułach)

Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Wówczas:

1. Jeśli u i w są różnowartościowe, to v jest różnowartościowy.
2. Jeśli u i w są surjekcjami, to v jest surjekcją.
3. Jeśli u i w są izomorfizmami, to v jest izomorfizmem.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, niech M, N będą lewymi R -modułami, niech $\phi : M \rightarrow N$ będzie homomorfizmem modułów. Moduł $N/\text{im } \phi$ nazywamy **kojądrem** homomorfizmu ϕ i oznaczamy $\text{coker } \phi$.

Twierdzenie (lemat o węźu)

Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f'} & N_2 & \xrightarrow{g'} & N_3 & \end{array}$$

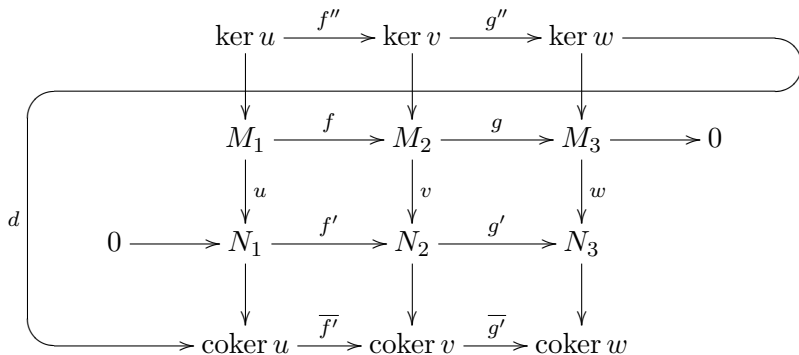
wiersze będą ciągami dokładnymi. Wówczas ciąg

$$0 \rightarrow \ker u \xrightarrow{f''} \ker v \xrightarrow{g''} \ker w \xrightarrow{d} \operatorname{coker} u \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{coker} v \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{coker} w \rightarrow 0$$

jest dokładny, gdzie $f'' = f|_{\ker u}$, $g'' = g|_{\ker v}$ oraz

$\overline{f'}(n_1 + \operatorname{im} u) = f'(n_1) + \operatorname{im} v$, $\overline{g'}(n_2 + \operatorname{im} v) = g'(n_2) + \operatorname{im} w$, a d jest pewnym “homomorfizmem łączącym”.

Wyjaśnienie nazwy “lemat o węź” pochodzi od następującego diagramu:



Definicja

Niech R będzie pierścieniem, $\mathcal{S}$ klasą lewych R -modułów, G grupą abelową. Funkcję $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow G$ nazywamy **addytywną**, gdy dla każdego ciągu dokładnego $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$, $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{S}$ zachodzi

$$\lambda(M_1) - \lambda(M_2) + \lambda(M_3) = 0$$

Przykład:

1. Niech F będzie ciałem, $\mathcal{S}$ klasą skończeniowymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem F . Wówczas funkcja $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}$ dana wzorem

$$\lambda(V) = \dim V$$

jest funkcją addytywną.

Uwaga

Niech R będzie pierścieniem, niech

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

będzie ciągiem dokładnym, niech $\mathcal{S}$ będzie klasą lewych R -modułów zawierającą wszystkie moduły M_i , $\ker g_i$ i $\operatorname{im} g_i$, dla $i \in \mathbb{Z}$, niech G będzie grupą przemienną, a $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow G$ funkcją addytywną. Wówczas

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \lambda(M_i) = 0.$$