

Homomorfizmy modułów.
Moduł ilorazowy, twierdzenie o
homomorfizmie.

Definicja:

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami.

1. Odwzorowanie $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **homomorfizmem**, jeśli:

- ▶ $\forall m_1, m_2 \in M [\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)],$
- ▶ $\forall a \in R \forall m \in M [\phi(am) = a\phi(m)].$

Zbiór wszystkich homomorfizmów modułu M w N oznaczamy $\text{Hom}_R(M, N)$.

2. Homomorfizm $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **monomorfizmem kategorijskim modułów**, jeśli dla dowolnych lewego R -modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : K \rightarrow M$:

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

3. Homomorfizm $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **epimorfizmem kategorijskim modułów**, jeśli dla dowolnych lewego R -modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : N \rightarrow K$:

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

4. Homomorfizm $\phi : M \rightarrow N$ nazywamy **izomorfizmem**, jeśli jest różnowartościowy i surjektywny. Dwa moduły M i N nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje między nimi izomorfizm, co oznaczamy przez $M \cong N$.
5. Jeśli $\phi : M \rightarrow N$ jest homomorfizmem, to zbiór $\phi^{-1}(0_N)$ nazywamy **jądrem** i oznaczamy $\ker \phi$, a zbiór $\phi(M)$ **obrazem** i oznaczamy $\operatorname{im} \phi$.

Przykłady:

1. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F , $\phi : V \rightarrow W$ przekształceniem liniowym. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.
2. Niech A, B będą grupami abelowymi, $\phi : A \rightarrow B$ homomorfizmem grup. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.
3. Niech M, N będą lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ niech będzie dane wzorem $\phi(m) = 0_N$. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów, nazywamy go **homomorfizmem zerowym**.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem modułów. Wówczas:

1. $\ker \phi < M$, $\operatorname{im} \phi < N$;
2. ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \phi = \{0_M\}$;
3. ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{im} \phi = N$;
4. ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\psi : N \rightarrow M$ taki, że

$$\phi \circ \psi = \operatorname{id}_N \text{ oraz } \psi \circ \phi = \operatorname{id}_M;$$

5. ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem kategorijskim modułów;
6. ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem kategorijskim modułów.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Wówczas:

1. $\phi(M_1) < N$;
2. $\phi^{-1}(N_1) < M$.

Twierdzenie (lemat o odpowiedniości między podmodułami)

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\pi : M \rightarrow N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Wówczas odwzorowania

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1),$$

$$\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N_1)1)$$

są wzajemnie odwrotne.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, $M_1, \dots, M_n, N$ lewymi R -modułami. Odwzorowanie $\phi : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow N$ nazywamy **homomorfizmem n -liniowym**, jeśli dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$:

1. dla $m_1 \in M_1, \dots, m_i, m'_i \in M_i, \dots, m_n \in M_n$:

$$\begin{aligned} & \phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + m'_i, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ &= \phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ &+ \phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m'_i, m_{i+1}, \dots, m_n), \end{aligned}$$

2. dla $m_1 \in M_1, \dots, m_n \in M_n$ oraz $a \in R$:

$$\begin{aligned} & \phi(m_1, \dots, m_{i-1}, am_i, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ &= a\phi(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_n). \end{aligned}$$

Definicja i uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N < M$.
Oznaczmy

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodawania i mnożenia zewnętrznego:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a(m + N) = am + N.$$

Wówczas M/N jest lewym R -modułem, nazywamy go **modułem ilorazowym M względem N** .

Przykłady:

4. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $W < V$. Wówczas przestrzeń ilorazowa V/W jest modułem ilorazowym.
5. Niech A będzie grupą abelową, niech $B < A$. Wówczas grupa ilorazowa A/B jest modułem ilorazowym.
6. Niech R będzie pierścieniem, niech $I \triangleleft R$. Wówczas pierścień ilorazowy R/I jest modułem ilorazowym.

Definicja i uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N < M$.
Wówczas odwzorowanie $\kappa : M \rightarrow M/N$ dane wzorem
 $\kappa(m) = m + N$ jest homomorfizmem surjektywnym oraz
 $\ker \kappa = N$. Nazywamy go **epimorfizmem kanonicznym**.

Wniosek

*Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N \subset M$.
Wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem
pewnego homomorfizmu.*

Twierdzenie (o homomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R -modułami, $\phi_1 : M \rightarrow N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \rightarrow N_2$ homomorfizmem.

1. Jeśli istnieje homomorfizm $\psi : N_1 \rightarrow N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$, to $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$.
2. Jeśli $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \rightarrow N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ponadto wówczas $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi_2$ oraz $\ker \psi = \phi_1(\ker \phi_2)$.
Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \phi_1 \swarrow & & \searrow \phi_2 \\ N_1 & \text{"na"} & N_2 \\ & \psi & \end{array}$$

jest przemienny.

Wniosek

Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R -modułami, $\phi_1 : M \rightarrow N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \rightarrow N_2$ homomorfizmem. Niech ponadto $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \rightarrow N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$ oraz:

1. jeśli ϕ_2 jest surjektywny, to ψ jest surjektywny;
2. jeśli $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$, to ψ jest różnowartościowy;
3. jeśli ϕ_2 jest surjektywny i $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$, to ψ jest izomorfizmem.

Wniosek (twierdzenie o homomorfizmie dla modułów ilorazowych)

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $K < M$, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem.

1. Jeśli istnieje homomorfizm $\psi : M/K \rightarrow N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \rightarrow M/K$ oznacza epimorfizm kanoniczny), to $K \subset \ker \phi$.
2. Jeśli $K \subset \ker \phi$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \rightarrow N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$. Ponadto wówczas $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi$ oraz $\ker \psi = \kappa(\ker \phi)$.

Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \swarrow \kappa & & \searrow \phi \\ M/K & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

"na"

jest przemienny.

Wniosek

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $K < M$, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem. Niech ponadto $K \subset \ker \phi$. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \rightarrow N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \rightarrow M/K$ oznacza epimorfizm kanoniczny) oraz

1. jeśli ϕ jest surjektywny, to ψ jest surjektywny;
2. jeśli $K = \ker \phi$, to ψ jest różnowartościowy;
3. jeśli ϕ jest surjektywny i $K = \ker \phi$, to ψ jest izomorfizmem.

Twierdzenie (I twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem. Wówczas

$$\operatorname{im} \phi \cong M / \ker \phi.$$

Twierdzenie (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$. Wówczas

$$N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

Twierdzenie (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Wówczas

$$M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1).$$

Twierdzenie (o klasyfikacji unitarnych modułów cyklicznych)

Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R -modułem cyklicznym. Wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \triangleleft R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.