

Paweł Gładki

Wybrane zagadnienia algebry

<http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/>

Konsultacje: *Środa, 13:00-13:45*

Jeżeli chcesz spotkać się z prowadzącym podczas konsultacji, postaraj się powiadomić go o tym przed lub po zajęciach, zadzwoń do jego pokoju, lub wyślij mu emaila.

Możliwe są także inne terminy konsultacji po wcześniejszym uzgodnieniu, także na Teams/Zoom.

Zasady zaliczania przedmiotu:

- ▶ 2 kolokwia warte w sumie 60% punktów
- ▶ zadania domowe warte w sumie 30% punktów
- ▶ aktywność na zajęciach warta w sumie 10% punktów

Plan wykładu:

1. Pojęcie modułu. Podmoduły. Podmoduły generowane przez zbiór.
2. Homomorfizmy modułów. Moduł ilorazowy, twierdzenie o homomorfizmie.
3. Ciągi dokładne. .
4. Produkty grup. Produkty i koprodukty grup abelowych. Produkty i koprodukty modułów.
5. Rozszczepialne ciągi dokładne.
6. Wolne grupy abelowe. Moduły wolne.
7. Przestrzenie wektorowe i wymiar.
8. Moduły projektywne i injektywne.
9. Kategorie: produkty, koprodukty, obiekty wolne, monomorfizmy i epimorfizmy.
10. Kategorie: ekwalizatory, jądra, obrazy.
11. Funktory i transformacja naturalna funktorów.
12. Funktory reprezentowalne.
13. Uniwersalne strzałki, granice i kogranice.
14. Funktory sprzężone.
15. Twierdzenie o funktorze sprzężonym.

Literatura:

1. P. Aluffi, *Algebra: Chapter 0*, Springer 2009.
2. T. Hungerford, *Algebra*, Springer 1974.
3. S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer 1971.

Pojęcie modułu. Podmoduły.
Podmoduły generowane przez zbiór.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, M addytywną grupą przemienną. M nazywamy **lewym R -modułem**, jeżeli na M określone jest działanie zewnętrzne z pierścieniem skalarów $R \cdot : R \times M \rightarrow M$ takie, że

1. $\forall a \in R \forall m_1, m_2 \in M [a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2]$,
2. $\forall a_1, a_2 \in R \forall m \in M [(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m]$,
3. $\forall a_1, a_2 \in R \forall m \in M [(a_1a_2)m = a_1(a_2m)]$.

Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką i spełniony jest dodatkowo warunek

4. $\forall m \in M (1m = m)$,

to M nazywamy **lewym unitarnym R -modułem**.

W analogiczny sposób definiujemy **prawy R -moduł** i **prawy unitarny R -moduł**.

Uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M lewym unitarnym R -modułem.

Wówczas:

1. $\forall a_1, a_2 \in R \forall m \in M [(a_1 - a_2)m = a_1m - a_2m],$
2. $\forall m \in M (0m = 0).$

Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką, a M lewym unitarnym R -modułem, to

3. $\forall m \in M [(-1)m = -m].$

Uwaga

Niech R będzie pierścieniem, M addytywną grupą przemienną. Wówczas M jest lewym R -modulem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm pierścieni $\phi : R \rightarrow \text{End}M$.

Przykłady:

1. Niech F będzie ciałem, V przestrzenią wektorową nad ciałem F .
Wówczas V jest lewym unitarnym F -modułem.
2. Niech A będzie addytywną grupą abelową.
Wówczas A jest lewym unitarnym $\mathbb{Z}$ -modułem.
3. Niech R będzie pierścieniem, I ideałem lewostronnym w R .
Wówczas I jest lewym R -modułem.
4. Niech R będzie pierścieniem.
Wówczas R jest lewym R -modułem.

5. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $\tau \in \text{End}V$, niech $\phi : F[x] \rightarrow \text{End}V$ będzie dane wzorem

$$\phi(f) = f(\tau).$$

Wówczas V jest lewym unitarnym $F[x]$ -modułem.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem.

*Podzbiór N zbioru M nazywamy **podmodułem** modułu M ,
gdy $(N, \cdot \upharpoonright_{R \times N})$ jest lewym R -modułem.*

Oznaczamy $N < M$.

Przykłady:

6. Niech F będzie ciałem, V przestrzenią wektorową nad ciałem F , W podprzestrzenią przestrzeni V .
Wówczas W jest podmodułem V .
7. Niech A będzie addytywną grupą abelową, B podgrupą grupy A .
Wówczas B jest podmodułem A .
8. Niech R będzie pierścieniem, I ideałem lewostronnym w R .
Wówczas I jest podmodułem modułu R .

9. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F ,
niech $\tau \in \text{End}V$.

Niech W będzie podprzestrzenią τ -niezmienniczą
przestrzeni V .

Wówczas W jest podmodułem $F[x]$ -modułu V .

10. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, I
ideałem lewostronnym R .

Wówczas $IM = \{a_1m_1 + \dots + a_nm_n : a_i \in I, m_i \in M\} < M$.

Twierdzenie

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $\mathcal{R} = \{N_i : i \in I\}$ rodziną podmodułów modułu M .

Wówczas:

1. $\bigcap_{i \in I} N_i$ jest podmodułem modułu M ,
2. $\bigcup_{i \in I} N_i$ jest podmodułem modułu M , o ile $\mathcal{R}$ jest łańcuchem.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem oraz $A \subset M$ pewnym zbiorem.

Najmniejszy w sensie inkluzji podmoduł modułu M zawierający zbiór A (tj. przekrój wszystkich podmodułów modułu M zawierających A) nazywamy **podmodułem generowanym przez A** i oznaczamy $\langle A \rangle$.

Każdy zbiór A o tej własności, że $\langle A \rangle = M$ nazywamy **zbiorem generatorów** modułu M .

Jeśli $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ to oznaczamy

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle A \rangle.$$

Mówimy, że moduł jest **skończenie generowany** (odpowiednio, **cykliczny**), gdy istnieje skończony (odpowiednio, jednoelementowy) zbiór jego generatorów.

Twierdzenie (o postaci elementów podmodułu generowanego przez zbiór)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem oraz $A \subset M$ pewnym zbiorem.

Wówczas

$$\begin{aligned} \langle A \rangle = \{ & r_1 a_1 + \dots + r_n a_n + k_1 b_1 + \dots + k_m b_m : \\ & n, m \in \mathbb{N}, r_i \in R, a_i, b_i \in A, k_i \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką, a M unitarnym R -modułem, to wówczas:

$$\langle A \rangle = \{ r_1 a_1 + \dots + r_n a_n : n \in \mathbb{N}, r_i \in R, a_i \in A \}.$$

Przykłady:

11. Niech F będzie ciałem, V przestrzenią wektorową nad ciałem F .

Każda podprzestrzeń jednowymiarowa jest podmodułem cyklicznym.

Każda podprzestrzeń skończeniowymiarowa jest podmodułem skończenie generowanym.

12. Niech A będzie addytywną grupą abelową.

Każda podgrupa cykliczna jest podmodułem cyklicznym.

13. Niech R będzie pierścieniem.

Każdy ideał główny jest podmodułem cyklicznym.

14. Niech V będzie skończeniowymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $\tau \in \text{End}V$.

Wówczas $F[x]$ -moduł V jest skończenie generowany.

Definicja

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem,
 $N_1, N_2 < M$.

Podmoduł $\langle N_1 \cup N_2 \rangle$ nazywamy **sumą algebraiczną** N_1 i N_2 i
oznaczamy $N_1 + N_2$.

Twierdzenie (o postaci elementów sumy algebraicznej podmodułów)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$.

Wówczas:

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 : n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}.$$

Twierdzenie (Dedekinda)

Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $K, L, N < M$ i niech $K \supset L$.

Wówczas

$$K \cap (L + N) = L + K \cap N.$$