

Zestaw zadań 4: Izometrie przestrzeni ortogonalnych

- (1) **Izometriami własnymi** figury nazywamy te automorfizmy ortogonalne (izometrie), dla których obrazem danej figury jest ona sama. Wyznaczyć wszystkie izometrie własne (ich macierze względem bazy kanonicznej))
- a) kwadratu $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + R(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ w $\mathbb{R}^2$ ze zwykłym iloczynem skalarnym (jest ich 8);
- b) kwadratu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + R(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2)$ w $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym iloczynem skalarnym (jest ich 16);
- c) sześcianu $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + R(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3)$ w $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym iloczynem skalarnym (jest ich 48);
- (Wskazówka: każde przekształcenie, przekształcające wierzchołki na wierzchołki i sąsiednie wierzchołki na sąsiednie wierzchołki musi być izometrią).
- (2) Przedstawić jako złożenie symetrii hiperpłaszczyznowych endomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze zwykłym iloczynem skalarnym, mający macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ względem bazy kanonicznej.
- (3) Sprawdzić, że zbiór $SO(\mathbb{R}, 2)$ rzeczywistych macierzy ortogonalnych stopnia 2 o wyznaczniku 1 jest równy $\left\{ \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} : x \in [0, 2\pi) \right\}$. Wyznaczyć zbiór $O(\mathbb{R}, 2)$ rzeczywistych macierzy ortogonalnych stopnia 2.
- (4) Niech w $\mathbb{R}^2$ $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 - y^2$. Sprawdzić, że $SO(\mathbb{R}, q) = \left\{ \pm \begin{bmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ -\sinh(x) & \cosh(x) \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$. Wyznaczyć $O(\mathbb{R}, q)$
- Definicje funkcji hiperbolicznych:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{th}(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \end{aligned}$$

- (5) Dwa obiekty geometryczne nazywamy **przystającymi**, gdy istnieje automorfizm ortogonalny przekształcający jeden z nich na drugi, i **ściśle przystającymi**, gdy istnieje izometria przysta przekształcająca jeden z nich na drugi.
- a) wykazać, że każda z relacji: przystawania i ścisłego przystawania jest relacją równoważności;
- b) wykazać, że każde dwie bazy prostopadłe unormowane przestrzeni ortogonalnej są przystające;
- c) wykazać, że zbiór wszystkich baz prostopadłych unormowanych rozpada się na dwa podzbiory tak, że każde dwie bazy należące do jednego podzbioru są ściśle przystające, a należące do różnych podzbiorów - nie są ściśle przystające (podzbiory te nazywamy orientacjami);
- d) z wektorów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym iloczynem skalarnym można utworzyć sześć różnych baz prostopadłych unormowanych. Które z nich są do siebie ściśle przystające?

- (6) Wykazać, że dla każdej izometrii parzystej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym iloczynem skalarnym istnieje baza, względem której macierzą tej izometrii jest macierz $\begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Skorzystać z tego, że taka izometria musi być złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych)
- (7) ξ jest zwykłym iloczynem skalarnym w przestrzeni współrzędnych F^n . Wykazać:
- Macierz kwadratowa A stopnia n nad ciałem F jest symetryczna i idempotentna (tzn. $A^2 = A$) $\Leftrightarrow A$ jest macierzą rzutu prostopadłego na pewną podprzestrzeń względem bazy kanonicznej. (wskazówka: zadanie ?? str. ??);
 - Macierz kwadratowa B stopnia n nad ciałem F jest symetryczna i inwolutywna (tzn. $B^2 = I$) $\Leftrightarrow B$ jest macierzą symetrii względem pewnej podprzestrzeni w bazie kanonicznej przestrzeni F^n ze zwykłym iloczynem skalarnym.
- (8) Wykazać, że dla macierzy kwadratowej A stopnia n nad ciałem F następujące warunki są równoważne:
- $A^T \cdot A = I$;
 - A jest macierzą w bazie kanonicznej automorfizmu ortogonalnego przestrzeni F^n ze zwykłym iloczynem skalarnym;
 - A jest macierzą automorfizmu ortogonalnego pewnej przestrzeni ortogonalnej względem bazy prostopadłej unormowanej;
 - A jest macierzą przejścia od jednej bazy prostopadłej unormowanej do drugiej bazy prostopadłej unormowanej pewnej przestrzeni ortogonalnej;
 - kolumny A tworzą bazę prostopadłą unormowaną przestrzeni F^n ze zwykłym iloczynem skalarnym;
 - transponowane wiersze A tworzą bazę prostopadłą unormowaną przestrzeni F^n ze zwykłym iloczynem skalarnym.
- Macierz spełniającą powyższe warunki nazywamy **macierzą ortogonalną**.
- (9) Udowodnić, że:
- macierz jednostkowa I jest macierzą ortogonalną;
 - macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest macierzą ortogonalną;
 - iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.
- (10) Niech v będzie unormowanym wektorem przestrzeni ortogonalnej (F^n, ξ) ze zwykłym iloczynem skalarnym ξ (tzn. $q(v) = 1$). Sprawdzić, że macierz $P = I - 2vv^T$ jest macierzą ortogonalną. Obliczyć Pv i Pw przy założeniu, że $w \perp v$.
Jak zbudować macierz ortogonalną z dowolnego wektora nieizotropowego?
- (11) Dobrać trzecią kolumnę tak, by macierz A o wyrazach rzeczywistych była macierzą ortogonalną:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & ? \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & ? \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & ? \end{bmatrix}$$

- (12) Sprawdzić, że dla dwóch rozwiązań X, Y równania z zadania ?? str. ?? macierz XY^{-1} jest macierzą ortogonalną. Sprawdzić, że jeśli X jest rozwiązaniem tego równania, a P jest macierzą ortogonalną, to PX jest rozwiązaniem tego równania.
- (13) Udowodnić równoważności:
- $\varphi \in O(V, \xi) \Leftrightarrow \varphi^{-1} \in O(V, \xi)$

b) $(\varphi \in O(V, \xi) \wedge \psi \in O(V, \xi)) \Leftrightarrow (\varphi \in O(V, \xi) \Leftrightarrow \varphi \circ \psi \in O(V, \xi)) \Leftrightarrow (\psi \in O(V, \xi) \wedge \varphi \circ \psi \in O(V, \xi))$.

(14) Niech $V = \mathbb{R}[X]_n$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia $\leq n$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Odwzorowanie $b : V \cdot V \rightarrow \mathbb{R}$ określono wzorem

$$\text{a) } b(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad \text{b) } b(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Wykazać, że b jest formą dwuliniową symetryczną, niezdegenerowaną i dodatnio określoną. Wyznaczyć macierz b względem bazy $1, X, \dots, X^n$. Dla $n = 4$ znaleźć bazę prostopadłą unormowaną.

(15) Wykazać, że przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^3, \xi)$, gdzie $\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) = xx' + xy' + x'y + 3yy' +$

zz' jest przestrzenią euklidesową. Znaleźć równanie ogólne prostej prostopadłej do płaszczyzny

$Sol(X_1 = 0)$ i przecinającej proste L_1, L_2 , gdzie $L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

(16) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^6, \xi)$ w której

$$q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}\right) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_1x_6$$

$$+ x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6)$$

jest euklidesowa ?