

Zestaw zadań 3: Ortogonalizacja Grama-Schmidta

- (1) Niech $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ będzie bazą prostopadłą unormowaną przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) , a $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ - dowolnym układem wektorów. Udowodnić, że macierz $P = [\xi(v_i, u_j)]$, jest macierzą przejścia od $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ do $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- (2) Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) , jeśli:
 - (a) $V = \mathbb{R}^3$, a macierz funkcjonału dwuliniowego $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ w bazie $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$ jest równa $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;
 - (b) $V = \mathbb{R}^4$, a $q_\xi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = 2xz + yz - xy$;
 - (c) $V = \mathbb{Z}_5^3$, a macierz ξ w bazie kanonicznej jest równa $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- (3) Znaleźć bazę prostopadłą unormowaną przestrzeni $(\mathbb{Q}^2, \xi)$ w której $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x^2 + 2y^2$. Czy ma bazę prostopadłą unormowaną przestrzeń $(\mathbb{Q}^2, \xi)$, w której $q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 7x^2 + 7y^2$? (Wskazówka: zadanie ?? str. ??)
- (4) **Metoda Jacobiego** znajdowania kongruentnej macierzy diagonalnej.
 - (a) Niech $A_i = G_\xi(v_1, \dots, v_i)$ będzie macierzą Grama układu początkowych i wektorów spośród wektorów $v_1, \dots, v_k$, a $u_1, \dots, u_k$ będą wektorami otrzymanymi z $v_1, \dots, v_k$ za pomocą ortogonalizacji Grama. Wykazać, że jeśli $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne i $\text{lin}(v_1, \dots, v_k)$ jest anizotropowa, to $G_\xi(u_1, \dots, u_k)$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej skalary $\frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A_2)}, \dots, \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})}$.
 - (b) Niech dla macierzy symetrycznej $A = [a_{ij}]$ stopnia n macierze $A_1 = [a_{11}]$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\dots$, $A_n = A$ mają wyznaczniki różne od 0. Udowodnić, że macierz A i macierz diagonalna, mająca na przekątnej skalary $\frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}, \frac{\det(A_3)}{\det(A_2)}, \dots, \frac{\det(A_n)}{\det(A_{n-1})}$ są macierzami kongruentnymi.
- (5) **Metoda Lagrange'a** znajdowania kongruentnej macierzy diagonalnej.
 Niech w niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) wzór na wartość formy kwadratowej

$$q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

w zależności od współrzędnych w bazie $(v_1, \dots, v_n)$ dany będzie wielomianem

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j.$$

Tworzymy ciąg wielomianów:

krok 1.

i) jeśli $a_{11} \neq 0$, to

$$(1) \quad F(X_1, X_2, \dots, X_n) = a_{11} X_1^2 + \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j;$$

dodając i odejmując $\left(\frac{1}{2a_{11}} \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i \right)^2$ i oznaczając $Y_1 = X_1 + \frac{1}{2a_{11}} \sum_{i=2}^n a_{1i} X_i$, $b_1 = a_{11}$ przepisujemy wzór (??) w postaci

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + F_1(X_2, \dots, X_n)$$

$$\text{gdzie } F_1(X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j - a_{11} \left(\frac{1}{2a_{11}} \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i \right)^2;$$

ii) jeśli $a_{11} = 0$, to

$$(2) \quad F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=2}^n a_{1i} X_1 X_i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} X_i X_j$$

i jeśli k jest najmniejszym takim numerem, że $a_{1k} \neq 0$ (dlaczego istnieje takie k ?), to oznaczamy $Z_k = \sum_{i=k}^n a_{1i} X_i - X_1$, wyliczamy z tej równości $X_k = \frac{1}{a_{1k}} (Z_k + X_1 - \sum_{i=k+1}^n a_{1i} X_i)$ i wstawiamy do wielomianu F ; porządkujemy otrzymane wyrażenie doprowadzając je do postaci

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1(Z_k + X_1) + F'(X_2, \dots, X_{k-1}, Z_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$$

i to wyrażenie przekształcamy jak w przypadku i).

krok 2. po wykonaniu **kroku 1.** i uzyskaniu wyrażenia

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + F_1(X_2, \dots, X_n)$$

stosujemy **krok 1.** do wzoru $F_1(X_2, \dots, X_n)$ na wartość formy kwadratowej na wektorze z przestrzeni $\text{lin}(v_2, \dots, v_n)$; uzyskane wyrażenie $F_1(X_2, \dots, X_n) = b_2 Y_2^2 + F_2(X_3, \dots, X_n)$ wstawiamy do wzoru $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + F_1(X_2, \dots, X_n)$ i uzyskujemy wzór

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + b_2 Y_2^2 + F_2(X_3, \dots, X_n)$$

$\vdots$

krok m. jeśli po wykonaniu kroków $1, 2, \dots, m-1$ powstaje wzór

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + \dots + b_{m-1} Y_{m-1}^2 + F_{m-1}(X_m, \dots, X_n),$$

to stosujemy **krok 1.** do wzoru $F_{m-1}(X_m, \dots, X_n)$ na wartość formy kwadratowej na podprzestrzeni $\text{lin}(v_m, \dots, v_n)$; rezultat $F_{m-1}(X_m, \dots, X_n) = b_m Y_m^2 + F_m(X_{m+1}, \dots, X_n)$ wstawiamy do

wzoru uzyskanego w kroku $m - 1$.

Ostatecznie po n krokach powstaje wzór

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_1 Y_1^2 + \dots + b_n Y_n^2.$$

(a) sprawdzić, że macierz diagonalna $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ jest macierzą funkcjonału ξ względem pewnej bazy prostopadłej przestrzeni V ;

(b) sprawdzić, że funkcjonały liniowe $f_1, \dots, f_n$ takie, że $f_i(\sum_{j=1}^n x_j v_j) = Y_i(x_1, \dots, x_n)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ tworzą bazę przestrzeni sprzężonej V^* .

Stosując metodę Jacobiego i metodę Lagrange'a znaleźć dwoma sposobami macierz funkcjonału dwuliniowego w pewnej bazie prostopadłej i porównać objętość obliczeń:

$$(a) F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2; \quad (b) F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

$$(c) F(x_1, x_2, x_3) = 99x_1^2 - 12x_1 x_2 + 48x_1 x_3 + 130x_2^2 - 60x_2 x_3 + 71x_3^2;$$

$$(d) F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - x_4^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 12x_2 x_3 + 2x_3 x_4;$$

$$(e) F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - x_4^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 12x_2 x_3 + 2x_3 x_4 + x_2 x_5 - x_4 x_5.$$

- (6) (*Postać kanoniczna trójkianu kwadratowego*) Niech $f(X) = aX^2 + bX + c \in K[X]$ będzie trójkianem (tzn. wielomianem, który jest sumą trzech jednomianów) kwadratowym (tzn. stopnia 2). Z wielomianem $f(X)$ związany jest wielomian jednorodny

$$g(X, Y) = Y^2 f\left(\frac{X}{Y}\right) \in K[X, Y]$$

nazywany **ujednorodnieniem** wielomianu $f(X)$. Aby z ujednorodnienia wyznaczyć wielomian, wystarczy podstawić $Y = 1$:

$$f(X) = g(X, 1).$$

Rozwiązania równania $f(X) = 0$ są związane z tymi rozwiązaniami równania $g(X, Y) = 0$, które mają niezerową drugą współrzędną:

$$\text{jeśli } y \neq 0, \text{ to } g(x, y) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

(a) Sprowadzić wielomian $g(X, Y)$ do postaci kanonicznej.

(b) Podstawić w uzyskanym wyrażeniu $Y = 1$ (wynik nazywamy postacią kanoniczną trójkianu kwadratowego).

(c) Wyciągnąć wnioski dotyczące rozwiązywania i rozwiązalności równania $f(X) = 0$ w ciele K .

(d) Niech $K = \mathbb{R}$. Wiadomo, że wykres funkcji $y = x^2$ jest parabolą z ramionami zwróconymi w górę i wierzchołkiem w punkcie $(0, 0)$. Czym będzie wykres funkcji $y = f(x)$ dla trójkianu $f(X) = aX^2 + bX + c$? Wyznaczyć ekstremum tej funkcji bez użycia pochodnych.

- (7) Metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta zbudować bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \xi)$, gdzie ξ ma w bazie kanonicznej macierz

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (8) (a) Metodą Jacobiego znaleźć macierz diagonalną kongruentną do macierzy A z poprzedniego zadania.
 (b) Metodą Lagrange'a znaleźć macierz diagonalną kongruentną do macierzy A z poprzedniego zadania.
- (9) Zbudować macierz diagonalną kongruentną do macierzy
 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 nad ciałem F .
- (10) Znaleźć przynajmniej jedną macierz nieosobliwą $P \in \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ taką, że macierz $P^T A P$ jest diagonalna, jeśli
 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
 (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- (11) Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n o wyrazach rzeczywistych. Podać warunek konieczny i wystarczający na to, by równanie $A = X^T X$ miało rozwiązanie $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. (Wskazówka: jakie równoważne równanie spełnia niewiadoma $Y = X^{-1}$? czy to równanie ma związek z izomorfizmami przestrzeni ortogonalnych?).
- (12) Znaleźć przynajmniej jedną macierz nieosobliwą $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ taką, że $P^T P = A$, jeśli
 (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,
 (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.
 Czy istnieje rozwiązanie $P \in \text{GL}_3(\mathbb{Q})$?
- (13) Znaleźć choć jedno rozwiązanie $X \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ równania $X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & -12 & -13 \\ -5 & -12 & 30 & 33 \\ -5 & -13 & 33 & 39 \end{bmatrix}$.
- (14) Sprawdzić, że w przestrzeni F^n ze zwykłym iloczynem skalarnym
 (a) dla $n = 2$: wektorem prostopadłym do $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$;
 (b) dla $n = 3$: wektorem prostopadłym do $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ jest $\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$;
 (c) dla dowolnego n : wektorem prostopadłym do $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ jest ostatnia kolumna macierzy dołączonej do macierzy $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & * \end{bmatrix}$.

- (15) Wykazać, że jeśli wektor $u + v$ jest nieizotropowy i $q(u) = q(v) \neq 0$ to istnieje izometria parzysta przekształcająca u na v .
- (16) **Izometriami własnymi** figury nazywamy te automorfizmy ortogonalne (izometrie), dla których obrazem danej figury jest ona sama. Wyznaczyć wszystkie izometrie własne (ich macierze względem bazy kanonicznej) następujących figur, i te z nich, które nie są symetrami hiperpłaszczyznowymi rozłożyć na złożenie symetrii hiperpłaszczyznowych:

(a) kwadratu

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + R(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E(\mathbb{R}^2) : |x| \leq 1 \text{ i } |y| \leq 1 \right\}$$

w $E(\mathbb{R}^2)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym (jest ich 8);

(b) kwadratu

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + R(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(\mathbb{R}^3) : |x| \leq 1 \text{ i } |y| \leq 1 \text{ i } z = 0 \right\}$$

w $E(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym (jest ich 16);

(c) sześciangu

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + R(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(\mathbb{R}^3) : |x| \leq 1 \text{ i } |y| \leq 1 \text{ i } |z| \leq 1 \right\}$$

w $E(\mathbb{R}^3)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym (jest ich 48).

- (17) Wielomian jednej zmiennej nazywamy *wielomianem symetrycznym*, gdy ciąg jego współczynników jest palindromem (tzn. samo czyta się od początku do końca jak i od końca do początku), tzn.

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) &= (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) \\ X^{\deg(f)} f(X^{-1}) &= f(X), \end{aligned}$$

a *wielomianem antysymetrycznym*, gdy ciąg jego współczynników zmienia znak przy odwróceniu kolejności, tzn. gdy

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) &= (-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1, -a_0) \\ X^{\deg(f)} f(X^{-1}) &= -f(X). \end{aligned}$$

Wykazać, że jeśli $A \in SO(n, F)$, to wielomian charakterystyczny $f(X)$ macierzy A jest wielomianem symetrycznym dla parzystych n i wielomianem antysymetrycznym dla nieparzystych n .