

Zestaw zadań 1: Przestrzenie afiniczne

- (1) Niech $P, Q \in \mathbb{A}(K^n)$, A niech będzie niepustym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{A}(K^n)$ a U niech będzie niepustym podzbiorem K^n . Wykazać, że:
- (a) $\omega(\{P\}, \{Q\}) = \{\overrightarrow{PQ}\}$;
 - (b) $\overrightarrow{PQ} + \omega(Q, A) = \omega(P, A)$;
 - (c) $\omega(P, Q + U) = \overrightarrow{PQ} + U$;
 - (d) $P + \omega(P, A) = A$.
- (2) Niech $P, Q \in \mathbb{A}(K^n)$, $\alpha, \beta \in K^n$. Wykazać, że:
- (a) $P + \alpha = P + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$;
 - (b) $P + \alpha = Q + \alpha \Leftrightarrow P = Q$;
 - (c) $P + \alpha = Q + \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \beta - \alpha$.
- (3) Niech $H_i = P_i + U_i$, $i = 1, 2$, będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(K^n)$. Pokazać, że
- (a) $H_1 \subset H_2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2} \in U_2 \wedge U_1 \subset U_2)$; (b) $H_1 = H_2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2} \in U_2 \wedge U_1 = U_2)$.
- (4) Niech $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ będą punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(\mathbb{Q}^4)$. Które z punktów $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ należą do $H = af(P_1, P_2, P_3, P_4)$?
- (5) Niech $L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)$ i $L_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\right)$ będą prostymi w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(K^n)$. Niech A będzie macierzą, której kolumnami są wektory kierunkowe prostych L_1 oraz L_2 . Niech A_u będzie macierzą powstałą z A przez dopisanie kolumny $\begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$.
- (a) Pokazać, że proste L_1 oraz L_2 leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A_u) \leq 2$.
 - (b) Za pomocą macierzy A oraz A_u opisać następujące sytuacje: proste są równoległe, proste przecinają się, proste są skośne, (tzn. nie mieszczą się w jednej płaszczyźnie), są równe.
- (6) Wśród prostych przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

wskazać pary ilustrujące wszystkie możliwe wzajemne położenia dwóch prostych.

- (7) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ dane są: punkty $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, proste $L_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \text{ oraz } L_2 \text{ o równaniu ogólnym } \begin{cases} x + 2y + z + 3t = 11 \\ -x + y + 2z + 2t = 3 \\ 2x - 4y + 3z - t = 0 \end{cases}. \text{ Znaleźć}$$

- (a) płaszczyznę zawierającą punkt P oraz prostą L_1 ,
 (b) płaszczyznę zawierającą punkt Q oraz prostą L_2 ,
 (c) płaszczyznę zawierającą punkty P oraz Q i równoległą do L_1 ,
 (d) płaszczyznę zawierającą punkty P oraz Q i równoległą do L_2 ,
 (e) podprzestrzeń trójwymiarową zawierającą proste L_1 oraz L_2 ,
 (f) podprzestrzeń trójwymiarową zawierającą prostą L_1 oraz punkty P i Q ,
 (g) podprzestrzeń trójwymiarową zawierającą prostą L_2 oraz punkty P i Q .

Szukane podprzestrzenie afiniczne mogą być zadane bądź parametrycznie, bądź równaniem ogólnym.

- (8) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(K^n)$ dane są proste L_1 oraz L_2 , których równania ogólne mają odpowiednio postać:

$$L_1 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \end{cases},$$

$$L_2 : \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = d_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ b_{n-1,1}x_1 + b_{n-1,2}x_2 + \cdots + b_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \end{cases}.$$

Oznaczmy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} & c_{n-1} \end{array} \right],$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad B_u = \left[\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} & d_{n-1} \end{array} \right].$$

L_1 i L_2 są prostymi, więc $r(A) = r(A_u) = r(B) = r(B_u) = n - 1$. Za pomocą macierzy $\left[\frac{A}{B} \right]$

oraz $\left[\frac{A_u}{B_u} \right]$ opisać wszystkie możliwe wzajemne położenia prostych L_1 oraz L_2 .

- (9) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ sprawdzić jakie są wzajemne położenia prostych danych układami równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z - t = 1 \\ 2x - y + 4z + t = 2 \\ 2y + 3t = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y - z + t = 1 \\ 2x + 2y - t = 2 \\ x + 3y - z - t = 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 4z + 4t = 1 \\ 3y + 2z - 3t = 1 \\ -x + y - 3z + 4t = 1 \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 10t = 2 \\ x + 3y + 3z + 2t = 2 \\ -4x + y - 3z - 2t = -4 \end{array} \right. .$$

(10) Jedna z prostych w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(K^n)$ zadana jest równaniem ogólnym, natomiast druga równaniem parametrycznym. Podać sposób zbadania wzajemnego położenia tych prostych. Zilustrować to na konkretnych przykładach w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$.

(11) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}(K^4)$ wskazać:

(a) dwie płaszczyzny, które mają dokładnie jeden punkt wspólny,

(b) dwie płaszczyzny, które nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Czy konstrukcje (a) lub (b) są możliwe w $\mathbb{A}(K^3)$?

(12) Sprawdzić, czy dane pary prostych lub płaszczyzn mają punkt wspólny:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{array} \right.$ i $\left\{ \begin{array}{l} 4x + y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = 3 \end{array} \right.$ w $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$,

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ w

$\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$,

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ i $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 3 \\ 4x - y + z = 3 \end{array} \right.$ w $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$.

(13) Znaleźć równanie parametryczne płaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbb{Z}_{23}^4)$ przechodzącej przez punkty

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(14) Znaleźć równanie ogólne płaszczyzny w $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ i równoległej

do prostych

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y - 5z + 7t = -2 \\ 2x - 3y + 3z - 2t = 5 \\ 4x + 11y - 3z + 16t = 1 \end{array} \right.$$

(15) Sprawdzić, czy podprzestrzenie afiniczne przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbb{Z}_{19}^5)$ zadane układami równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 5z - 4t = 1 \\ x - 2y + z - t - w = 3 \\ x + 2y + z - t + w = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z - 2t + w = 1 \\ x - 4y + z + t - w = 3 \end{array} \right.$$

są równoległe.

- (16) Znaleźć równanie ogólne oraz równanie parametryczne płaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$, przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i równoległej do prostej o równaniu ogólnym

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z - t = 8 \\ 3x - 2y + z - 3t = 7 \end{cases}.$$

- (17) Zbadać położenie płaszczyzny π w przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ danej równaniem parametrycznym

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

względem następujących płaszczyzn:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y + 2z + t = 2 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x + y + 2z + t = 1 \end{cases}, \quad \text{(c)} \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y + 2t = 1 \end{cases}, \\ \text{(d)} \begin{cases} x - y + z + t = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}, \quad \text{(e)} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \quad \text{(f)} \begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 3t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- (18) Znaleźć równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej w przestrzeni $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ przez punkty

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i równoległej do } \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

- (19) W przestrzeni $E(\mathbb{Q}^3)$ przez punkt P poprowadzić prostą przecinającą proste L_1 i L_2 , jeżeli

$$\text{(a)} P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right), L_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\text{(b)} P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), L_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\text{(c)} P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, L_1 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}, L_2 : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}.$$

- (20) (Równanie odcinkowe hiperpłaszczyzny) Podać równanie parametryczne oraz równanie ogólne hiperpłaszczyzny w przestrzeni $E(K^n)$, która przecina osie układu współrzędnych (tzn. proste

$$\theta + \text{lin}(\varepsilon_i), i = 1, 2, \dots, n) \text{ w punktach } \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ gdzie } a_1 \neq 0, a_2 \neq$$

$0, \dots, a_n \neq 0$. Jak po współczynnikach w równaniu ogólnym hiperpłaszczyzny poznać, że ta hiperpłaszczyzna jest równoległa do i -tej osi układu współrzędnych (zawiera i -tą oś układu współrzędnych)?

- (21) Ile prostych zawiera przestrzeń afiniczna $\mathbb{A}(\mathbb{Z}_p^n)$? Ile punktów ma prosta w tej przestrzeni?

- (22) Dane są dwa różne punkty $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Wykazać, że każde z następujących równań jest równaniem prostej $af(P_1, P_2)$ (prostej przechodzącej przez punkty P_1, P_2):

(a) $\begin{vmatrix} 1 & X & Y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$

(b) $\begin{vmatrix} X - x_1 & Y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$

(c) $\frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}$, o ile $x_2 \neq x_1$ i $y_2 \neq y_1$, (d) $Y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(X - x_1)$, o ile $x_2 \neq x_1$,

(e) $X - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(Y - y_1)$ o ile $y_2 \neq y_1$.

- (23) Wykazać, że równanie prostej $L = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right)$, można zapisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} X - x_1 & Y - y_1 \\ u & v \end{vmatrix} = 0$$

lub też, gdy $u \neq 0$ i $v \neq 0$, w postaci:

$$\frac{X - x_1}{u} = \frac{Y - y_1}{v}.$$

Uwaga: zwykle napis postaci $\frac{X - x_1}{u} = \frac{Y - y_1}{v}$ albo $(X - x_1) : u = (Y - y_1) : v$ uważamy za proporcję (czyli inny zapis równości $v(X - x_1) = u(Y - y_1)$) i dopuszczamy pisanie zera w mianowniku (dzielniku).

- (24) Dla jakich wartości współczynników u, v prosta $\frac{X - x_1}{u} = \frac{Y - y_1}{v}$ jest równoległa do osi OX , a dla jakich - do osi OY ?
- (25) Dla jakich wartości współczynników a, b prosta $aX + bY = c$ jest równoległa do osi OX , a dla jakich - do osi OY ?
- (26) Dla jakich wartości parametrów a, b proste $aX - 4Y + b = 0$, $4X - aY + 1 = 0$ (a) są równoległe, (b) pokrywają się?
- (27) Wykazać, że punkty $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ są współliniowe wtedy i tylko

wtedy, gdy $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$

- (28) Przez punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ poprowadzić prostą, tak, żeby środkiem jej odcinka zawartego między osiami współrzędnych był dany punkt P .
- (29) Przez punkt $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ poprowadzić prostą tak, by punkt A był środkiem odcinka zawartego między prostymi $2X + Y = 0$, $X - Y - 2 = 0$.
- (30) Wykazać, że prosta o równaniu $aX + bY + c = 0$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ax_1 + by_1 + c = ax_2 + by_2 + c$.
- (31) Przez punkt przecięcia prostych $2X - 7Y - 8 = 0$ i $3X + 2Y + 5 = 0$ poprowadzić prostą równoległą do prostej $2X + 3Y - 7 = 0$.

- (32) Dane są wierzchołki trójkąta $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Napisać równanie prostej przechodzącej przez środek boku AB i równoległej do boku BC .
- (33) W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, środek $S = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ boku AB i wektor $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$. Znaleźć równanie boku AC .
- (34) Dane są równania boków trójkąta AB : $2X - Y + 2 = 0$, BC : $X - Y = 0$, AC : $X + Y - 2 = 0$. Znaleźć współrzędne wierzchołków A , B , C .
- (35) Znaleźć równania boków trójkąta o wierzchołkach: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$.
- (36) Dane są wierzchołki trójkąta: $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Znaleźć równania boków tego trójkąta. Przez każdy wierzchołek poprowadzić prostą równoległą do przeciwległego boku. Znaleźć równania środkowych trójkąta ABC i trójkąta, którego bokami są owe równoległe.
- (37) W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ i równania trzech jego środkowych $4X + Y - 6 = 0$, $2X + Y - 2 = 0$, $X - 2 = 0$. Znaleźć równania boków tego trójkąta.
- (38) Napisać równania boków trójkąta mając dany wierzchołek $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz równania dwóch środkowych $X - 2Y + 1 = 0$, $Y - 1 = 0$.
- (39) Dane są równania dwóch środkowych trójkąta $4X + 5Y = 0$, $X - 3Y = 0$ i wierzchołek $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Znaleźć równania boków i pozostałe wierzchołki.
- (40) Dane są równania dwóch środkowych trójkąta $X + Y - 5 = 0$, $2X + Y - 11 = 0$ i równanie boku $X - 2Y + 7 = 0$. Znaleźć równania pozostałych boków oraz wierzchołki tego trójkąta.
- (41) Dane są równania dwóch boków równoległoboku: $8X + 3Y + 1 = 0$, $2X + Y - 1 = 0$ i równanie jednej z jego przekątnych $3X + 2Y + 3 = 0$. Znaleźć wierzchołki tego równoległoboku.
- (42) W równoległoboku $ABCD$ dane są równania boków: $3X + 4Y - 12 = 0$ - boku AB , i $5X - 12Y - 6 = 0$ - boku AD oraz punkt $E = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}$, będący środkiem boku BC . Znaleźć równania pozostałych boków równoległoboku.
- (43) Dane są dwa boki równoległoboku: $2X - Y = 0$, $X - 3Y = 0$ i punkt przecięcia się przekątnych $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Znaleźć równania przekątnych.
- (44) Dane są równania dwóch boków równoległoboku $X - Y - 1 = 0$ i $X - 2Y = 0$ oraz punkt przecięcia się przekątnych $S = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napisać równania pozostałych boków równoległoboku.
- (45) Znaleźć równania boków równoległoboku $ABCD$ wiedząc, że przekątne przecinają się w punkcie $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ a boki AB , BC , CD , DA przechodzą odpowiednio przez punkty $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- (46) Dla jakiej wartości parametru m proste $(m - 1)X + mY - 5 = 0$, $mX + (2m - 1)Y - 10 = 0$ przecinają się w punkcie leżącym na osi OX ?

- (47) Wykazać, że jeżeli trzy proste o równaniach: $a_iX + b_iY + c_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, przecinają się w jednym punkcie, to $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. Wykazać, że jeśli $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, to proste te przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.
- (48) Sprawdzić, czy proste $3X - Y + 6 = 0$, $4X + 3Y - 5 = 0$, $2X - Y + 5 = 0$ mają punkt wspólny.
- (49) Dla jakich wartości parametru a proste $2X - Y + 3 = 0$, $X + Y + 3 = 0$, $aX + Y - 13 = 0$ przecinają się w jednym punkcie?
- (50) Dane są dwie proste $2X - 3Y + 5 = 0$, $X = 1$. Dla jakich wartości parametrów a, b prosta $aX + bY + 1 = 0$ przechodzi przez punkt przecięcia się tych prostych?
- (51) **Pękiem prostych** (właściwym) nazywamy zbiór wszystkich prostych płaszczyzny przechodzących przez jeden punkt zwany **wierzchołkiem pęku**. Zbiór wszystkich prostych równoległych do danej prostej nazywamy **pękiem niewłaściwym**.
- (52) Wykazać, że jeżeli dwie różne proste o równaniach $a_iX + b_iY + c_i = 0$, $i = 1, 2$ przecinają się w punkcie P , to równanie dowolnej prostej należącej do pęku o wierzchołku P jest postaci:

$$t(a_1X + b_1Y + c_1) + u(a_2X + b_2Y + c_2) = 0,$$

gdzie liczby t, u nie są jednocześnie zerami.

- (53) Wykazać, że jeżeli dwie proste o równaniach $a_iX + b_iY + c_i = 0$, $i = 1, 2$ są równoległe, to równanie dowolnej prostej równoległej do tych prostych jest postaci:

$$t(a_1X + b_1Y + c_1) + u(a_2X + b_2Y + c_2) = 0,$$

gdzie liczby t, u nie są jednocześnie zerami.

- (54) Przez punkt przecięcia się prostych $2X - 6Y + 3 = 0$, $5X + Y - 2 = 0$ poprowadzić proste równoległe do osi układu współrzędnych.
- (55) Wykazać, że równanie dowolnej prostej należącej do pęku o wierzchołku $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest postaci:

$$a(X - x) + b(Y - y) = 0,$$

gdzie a, b nie są jednocześnie równe zeru.

- (56) Przez punkt przecięcia się prostych $2X - 7Y - 8 = 0$, $3X + 2Y + 5 = 0$ poprowadzić prostą równoległą do prostej $2X + 3Y - 7 = 0$.
- (57) Wykazać, że prosta $7X + 2Y - 15 = 0$ nie należy do pęku $5X + 3Y + 6 + t(3X - 4Y - 37) = 0$.
- (58) Z pęku prostych $2X + Y - 2 + t(X - 5Y - 23) = 0$ wybrać prostą przechodzącą przez środek odcinka AB o końcach $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

- (59) Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (60) Dane są trzy parami różne punkty $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ w położeniu ogólnym. Wykazać, że każde z następujących równań jest równaniem płaszczyzny $af(P_1, P_2, P_3)$

(płaszczyzny przechodzącej przez te punkty):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & X & Y & Z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ b) } \begin{vmatrix} X - x_3 & Y - y_3 & Z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(61) Wykazać, że równanie płaszczyzny $L = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix}\right)$ można zapisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} X - x_1 & Y - y_1 & Z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(62) Dla jakich wartości parametrów m, k płaszczyzny $4X - 3Y + 6kZ - 8 = 0$, $2mX + Y - 4Z + 4 = 0$ są równoległe?

(63) Dane są równania dwóch płaszczyzn: $a_iX + b_iY + c_iZ + d_i = 0$, $i = 1, 2$. Używając rzędów macierzy $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ oraz macierzy $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ podać warunki równoważne temu, że płaszczyzny te

a) przecinają się, b) są równoległe, c) są równe.

(64) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ i równoległej do płaszczyzny $2X - Y + 5Z - 1 = 0$.

Pękiem płaszczyzn (właściwym) nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn przecinających się wzdłuż jednej prostej. Zbiór wszystkich płaszczyzn równoległych do danej płaszczyzny nazywamy *pękiem niewłaściwym*.

Wiązką płaszczyzn nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt (*wiązka właściwa*) lub zbiór wszystkich płaszczyzn równoległych do danej prostej (*wiązka niewłaściwa*).

(65) Wykazać, że równanie dowolnej płaszczyzny należącej do pęku wyznaczonego przez płaszczyzny o równaniach $a_iX + b_iY + c_iZ + d_i = 0$, $i = 1, 2$ ma postać

$$t(a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1) + u(a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2) = 0,$$

gdzie t, u nie znikają jednocześnie.

(66) Sprawdzić, czy płaszczyzna $4X - 8Y + 17Z - 8 = 0$ należy do pęku płaszczyzn $t(5X - Y + 4Z - 1) + u(2X + 2Y - 3Z + 2) = 0$.

(67) Dla jakich wartości parametrów l, m płaszczyzna $5X + lY + 4Z + m = 0$ należy do pęku płaszczyzn $t(3X - 7Y + Z - 3) + u(X - 9Y - 2Z + 5) = 0$?

(68) Wykazać, że równanie dowolnej płaszczyzny należącej do wiązki wyznaczonej przez płaszczyzny o równaniach $a_iX + b_iY + c_iZ + d_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ ma postać

$$s(a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1) + t(a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2) + u(a_3X + b_3Y + c_3Z + d_3) = 0,$$

gdzie s, t, u nie znikają jednocześnie.

- (69) (*Równanie kanoniczne prostej*) Wykazać, że równanie prostej $L = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}\right)$, można zapisać w postaci:

$$\frac{X - x_0}{l} = \frac{Y - y_0}{m} = \frac{Z - z_0}{n}$$

przy czym taki napis uważamy za proporcję, czyli dopuszczamy zero w mianowniku. Jest to tzw. *równanie kanoniczne prostej*.

- (70) Napisać równanie kanoniczne prostej przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i równoległej do prostej $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

- (71) Napisać równanie kanoniczne prostej $af(P_1, P_2)$, gdzie $P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ dla $i = 1, 2$.

- (72) Wykazać, że dwie proste $L_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{bmatrix}\right)$ leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

- (73) Dla jakiej wartości parametru d prosta $\begin{cases} X + Y - Z + 2 = 0 \\ 2X - Y + Z + d = 0 \end{cases}$ przecina oś OX ?

- (74) Dane są równania trzech ścian równoległościanu: $2X + 3Y + 4Z - 12 = 0$, $X + Y - 1 = 0$, $Z + 5 = 0$ oraz jeden z jego wierzchołków $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Znaleźć równania trzech pozostałych ścian.

- (75) Dane są punkty $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Spośród tych punktów wybrać pary, które można połączyć odcinkiem przecinającym łamaną $RSTR$ (brzeg trójkąta RST).

- (76) Przez krawędź przecięcia się płaszczyzn o równaniach $6X - Y + Z = 0$, $5X + 3Z - 10 = 0$ poprowadzić płaszczyznę równoległą do osi OX .

- (77) Dane są równania ścian czworościanu $X + 2Y + Z + 2 = 0$, $X + Y - 1 = 0$, $3X + Z + 1 = 0$ (*czworościan* jest to ostrosłup o podstawie trójkątnej). Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez krawędź przecięcia dwóch pierwszych ścian i przez środek krawędzi przecięcia się dwóch ostatnich. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez krawędź przecięcia dwóch pierwszych ścian i równoległej do przeciwległej krawędzi czworościanu.

- (78) Dany jest czworościan o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez krawędź AB i równoległej do krawędzi CD .

- (79) Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt przecięcia się płaszczyzn o równaniach $X - Y = 0$, $X + Y - 2Z + 1 = 0$, $2X + Z - 4 = 0$ oraz:

a) przechodzącej przez oś OX , b) równoległej do płaszczyzny OXZ ,

c) przechodzącej przez początek układu i punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- (80) Znaleźć równania prostej leżącej w płaszczyźnie $Y + 2Z = 0$ i przecinającej proste $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$$\text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right), L_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{lin}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$