

8 Iloczyn wektorowy.

Definicja 8.1. Niech V^n będzie zorientowaną przestrzenią euklidesową. **Iloczynem wektorowym** wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in V$ nazywamy wektor $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} \in V$ spełniający warunki:

i. jeśli układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ jest liniowo zależny, to $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} = 0$;

ii. jeśli układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ jest liniowo niezależny, to:

a) $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} \perp \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$,

b) $\|\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1}\| = \sqrt{g(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})}$,

c) układ $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1})$ jest dodatnio zorientowany.

Uwaga 8.2. Niech V^n będzie zorientowaną przestrzenią euklidesową, niech $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in V$.

1. $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1}$ jest wyznaczony jednoznacznie;
2. $\alpha_1 \times \dots \alpha_i \times \dots \alpha_j \times \dots \times \alpha_{n-1} = -\alpha_1 \times \dots \times \alpha_j \times \dots \alpha_i \times \dots \times \alpha_{n-1}$.

Twierdzenie 8.3. Niech V^n będzie zorientowaną przestrzenią euklidesową, niech $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in V$. Niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ będzie dodatnio zorientowaną, prostopadłą i unormowaną bazą przestrzeni V^n , niech

$$\alpha_i = a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n, i \in \{1, \dots, n-1\},$$

i niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_{n-1}^n$. Wówczas

$$\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} = (-1)^{1+n} \det(A_1) \beta_1 + \dots + (-1)^{n+n} \det(A_n) \beta_n,$$

gdzie A_j powstaje z A przez wykreślenie j -tej kolumny.

Wniosek 8.4. Niech V^n będzie zorientowaną przestrzenią euklidesową, niech $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in V$.

1. Iloczyn wektorowy jest liniowy ze względu na każdą zmienną.

2. Niech $\alpha_n \in V^n$ i niech $A = [\alpha_1 | \dots | \alpha_{n-1} | \alpha_n]$. Wówczas

$$(\alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \det(A).$$

3. Niech $n = 3$ i niech $\alpha_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $\alpha_2 = [x_2, y_2, z_2]$ będą współrzędnymi wektorów α_1, α_2 w zorientowanej bazie ortonormalnej $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Wówczas

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = \det \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

4. Niech $n = 3$. Wówczas

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\| = \|\alpha_1\| \cdot \|\alpha_2\| \cdot \sin \varphi,$$

gdzie φ jest kątem zorientowanym między wektorami α_1 i α_2 .