

7 Zorientowane przestrzenie euklidesowe.

Definicja 7.1. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ będą bazami V^n . Bazy te nazywamy **zgodnie zorientowanymi**, jeżeli wyznacznik macierzy przejścia od $\mathcal{B}_1$ do $\mathcal{B}_2$ jest dodatni. W przeciwnym razie bazy te nazywamy **przeciwnie zorientowanymi**.

Jeżeli wraz z wyborem bazy przestrzeni V^n dokonano wyboru orientacji, to V^n nazywamy **zorientowaną przestrzenią euklidesową**.

Jeżeli V^n jest przestrzenią kierunkową afinicznej przestrzeni euklidesowej E^n w której dokonano wyboru orientacji, to E^n nazywamy **zorientowaną afiniczną przestrzenią euklidesową**.

Uwaga 7.2. Niech V^2 będzie zorientowaną dwuwymiarową przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^2$ będą niezerowymi wektorami. Zdefiniujmy liczbę $\vec{Z}(\alpha, \beta) \in (-\pi, \pi]$ następująco:

$$\vec{Z}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \angle(\alpha, \beta), & \text{jeśli } (\alpha, \beta) \text{ tworzą bazę zgodnie zorientowaną z bazą } V^2 \\ & \text{lub } \alpha \parallel \beta, \\ -\angle(\alpha, \beta), & \text{jeśli } (\alpha, \beta) \text{ tworzą bazę przeciwnie zorientowaną z bazą } V^2, \end{cases}$$

oraz relację $\sim$ wzorem:

$$(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \vec{Z}(\alpha, \beta) = \vec{Z}(\gamma, \delta).$$

Wówczas relacja $\sim$ jest równoważnością.

Definicja 7.3. Niech V^2 będzie zorientowaną dwuwymiarową przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^2$ będą niezerowymi wektorami. Klasę abstrakcji relacji $\sim$ nazywamy **kątem zorientowanym** pomiędzy wektorami α, β , zaś liczbę $\vec{Z}(\alpha, \beta)$ **miarą** kąta zorientowanego.

Uwaga 7.4. Niech V^2 będzie zorientowaną dwuwymiarową przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V^2$ będą niezerowymi wektorami.

1. $\cos \vec{Z}(\alpha, \beta) = \cos(\alpha, \beta)$,
2. $\vec{Z}(\alpha, \beta) = -\vec{Z}(\beta, \alpha)$,
3. jeśli $ab > 0$, to $\vec{Z}(\alpha, \beta) = \vec{Z}(a\alpha, b\beta)$,
4. jeśli $\vec{Z}(\alpha, \beta) = \vec{Z}(\gamma, \delta)$, to istnieje izometria parzysta τ taka, że $\tau(\alpha) \uparrow \uparrow \gamma$ oraz $\tau(\beta) \uparrow \uparrow \delta$,
5. $\vec{Z}(\alpha, \beta) + \vec{Z}(\beta, \gamma) = \vec{Z}(\alpha, \gamma)$,
6. jeśli $\vec{Z}(\alpha, \beta) = \pm \frac{\pi}{2}$, to $\alpha \perp \beta$.

Stwierdzenie 7.5. Niech E^2 będzie zorientowaną dwuwymiarową afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $P, Q \in E^2$ będą punktami, $P \neq Q$. Niech $\alpha_1 = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ i niech $\alpha_2 \perp \alpha_1$ będzie unormowanym wektorem takim, że baza (α_1, α_2) jest zgodnie zorientowana z bazą V^2 . Niech ponadto $R \neq P$ będzie punktem. Wówczas

$$R = P + (\overrightarrow{PR}, \alpha_1)\alpha_1 + (\overrightarrow{PR}, \alpha_2)\alpha_2.$$

Oznaczmy ponadto przez φ kąt skierowany pomiędzy wektorami α_1 i $\overrightarrow{PR}$ oraz niech $a = (\overrightarrow{PR}, \alpha_1)$, $b = (\overrightarrow{PR}, \alpha_2)$ i $r = \|\overrightarrow{PR}\|$. Wówczas

$$a = \cos \varphi \quad \text{oraz} \quad b = r \sin \varphi.$$

Definicja 7.6. Niech E^2 będzie zorientowaną dwuwymiarową afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $P, Q \in E^2$ będą punktami, $P \neq Q$. Niech $\alpha_1 = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ i niech $\alpha_2 \perp \alpha_1$ będzie unormowanym wektorem takim, że baza (α_1, α_2) jest zgodnie zorientowana z bazą V^2 . Niech $R \neq P$ będzie punktem i niech φ oznacza kąt skierowany pomiędzy wektorami α_1 i $\overrightarrow{PR}$, zaś $r = \|\overrightarrow{PR}\|$. Liczbę r nazywamy **promieniem** punktu R , kąt φ **amplitudą** punktu R , zaś parę (r, φ) **współrzędnymi biegunowymi** punktu R .

Definicja 7.7. Niech E^n będzie afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $A \subseteq E^n$ oraz $P \in E^n$. **Odległością** punktu P od zbioru A nazywamy liczbę

$$\rho(P, A) = \inf_{Q \in A} \rho(P, Q).$$

Niech $A, B \subseteq E^n$. **Odległością** między zbiorami A i B nazywamy liczbę

$$\rho(A, B) = \inf_{P \in A} \rho(P, B).$$

Stwierdzenie 7.8. Niech E^n będzie afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $P \in E^n$ i niech H będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E^n . Wówczas

$$\rho(P, H) = \rho(P, \pi_H(P)).$$

Stwierdzenie 7.9. Niech E^n będzie afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $P \in E^n$ i niech H będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E^n . Niech ponadto $(Q, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie układem bazowym podprzestrzeni afinicznej H . Wówczas

$$\rho(P, H) = \sqrt{\frac{g(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \overrightarrow{PQ})}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}}.$$

Definicja 7.10. Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią afiniczną i niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych w $S(E)$. **Równoległością** k -wymiarowym w przestrzeni E zaczepionym w punkcie $P \in E$ i rozpiętym na wektorach $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ nazywamy zbiór punktów

$$R(P; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \left\{ P + \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i \mid a_1, \dots, a_k \in [0, 1] \right\}.$$

Definicja 7.11. Niech E będzie afiniczną przestrzenią euklidesową i niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych w $S(E)$, niech $P \in E$. m -wymiarową miarą równoległości $R = R(P; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ nazywamy liczbę $\mu_m(R)$ określoną następująco:

$$\mu_m(R) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } m > k, \\ \sqrt{g(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}, & \text{jeśli } m = k, \\ \infty, & \text{jeśli } m < k. \end{cases}$$

Stwierdzenie 7.12. Niech E będzie afiniczną przestrzenią euklidesową i niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych w $S(E)$, niech $P \in E$. Niech ponadto $(P, \beta_1, \dots, \beta_n)$ będzie prostopadłym i unormowanym układem bazowym oraz

$$\alpha_i = a_{1i}\beta_1 + \dots + a_{ni}\beta_n, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wówczas

$$\mu_n(R) = |\det(a_{ij})|.$$

Stwierdzenie 7.13. Niech E będzie afiniczną przestrzenią euklidesową i niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych w $S(E)$, niech $P \in E$. Wówczas

1. $\mu_1(R(P, \alpha_1)) = \|\alpha_1\|,$

2. jeśli $l > 1$, to

$$\mu_l(R(P, \alpha_1, \dots, \alpha_l)) = h \cdot \mu_{l-1}(R(P, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})),$$

gdzie h jest długością rzutu prostopadłego wektora α_l na $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})^\perp$.