

6 Przestrzenie unormowane.

Uwaga 6.1. Niech (V_1, ξ_1) i (V_2, ξ_2) będą przestrzeniami euklidesowymi. Wówczas $(V_1, \xi_1) \cong (V_2, \xi_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_1 = \dim V_2$.

Notacja 6.2. Oznaczmy:

- V^n – przestrzeń euklidesowa wymiaru n ,
- E^n – afiniczna przestrzeń euklidesowa wymiaru n ,
- $(\alpha, \beta) := \xi(\alpha, \beta)$, gdzie ξ jest funkcjonalem dwuliniowym przestrzeni euklidesowej V^n (afinicznej przestrzeni euklidesowej E^n), który odtąd będziemy nazywać **iloczynem skalarnym**.

Definicja 6.3. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową. **Długością (normą) wektora** $\alpha \in V^n$ nazywamy liczbę rzeczywistą

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

Uwaga 6.4. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V^n oraz niech

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \quad \text{oraz} \quad \beta = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i.$$

Wówczas:

1. $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$
2. $\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$

Stwierdzenie 6.5. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^n$, niech $a \in \mathbb{R}$. Wówczas:

1. $\|\alpha\| \geq 0$,
2. $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$,
3. $\|a\alpha\| = |a|\|\alpha\|$,
4. (nierówność Schwarza) $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$,
5. (nierówność trójkąta) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$,
6. (twierdzenie Pitagorasa) $\alpha \perp \beta \Rightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$.

Definicja 6.6. Niech E^n będzie afiniczną przestrzenią euklidesową. **Odległością punktów** $P, Q \in E^n$ nazywamy liczbę rzeczywistą

$$\rho(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Stwierdzenie 6.7. Niech E^n będzie afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $P, Q, R \in E^n$. Wówczas:

1. $\rho(P, Q) \geq 0$,
2. $\rho(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$,
3. $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$,
4. $\rho(P, Q) \leq \rho(P, R) + \rho(R, Q)$,
5. jeśli $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest ortonormalnym układem bazowym E^n oraz $(a_1, \dots, a_n)$ i $(b_1, \dots, b_n)$ są współrzędnymi afinicznymi punktów P i Q , odpowiednio, to:

$$\rho(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

Uwaga 6.8. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^n$. Wobec nierówności Schwarza:

$$-1 \leq \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} \leq 1,$$

a zatem istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $\angle(\alpha, \beta) \in [0, \pi]$ taka, że

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}.$$

Rozważmy zbiór par wektorów $X = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in V^n \setminus \{0\}\}$ i relację $\sim$ określoną na X warunkiem:

$$(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \angle(\alpha, \beta) = \angle(\gamma, \delta).$$

Wówczas $\sim$ jest relacją równoważności.

Definicja 6.9. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\sim$ będzie relacją określoną jak wyżej. Klasę abstrakcji relacji $\sim$ nazywamy **kątem nieskierowanym**.

Definicja 6.10. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^n$. Wektory α i β są **zgodnie równoległe**, jeżeli α, β są niezerowe i $\alpha = a\beta$ dla pewnego $a > 0$. Oznaczamy $\alpha \uparrow \uparrow \beta$.

Wektory α i β są **niezgodnie równoległe**, jeżeli α, β są niezerowe i $\alpha = a\beta$ dla pewnego $a < 0$. Oznaczamy $\alpha \uparrow \downarrow \beta$.

Uwaga 6.11. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^n$. Relacja $\uparrow \uparrow$ jest równoważnością.

Definicja 6.12. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta \in V^n$. Klasę abstrakcji względem relacji $\uparrow \uparrow$ nazywamy **zwrotem wektora**.

Stwierdzenie 6.13. Niech V^n będzie przestrzenią euklidesową, niech $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V^n$ i niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas:

1. $\angle(\alpha, \beta) = \angle(\beta, \alpha)$,
2. $ab > 0 \Rightarrow \angle(\alpha, \beta) = \angle(a\alpha, b\beta)$,
3. $\angle(\alpha, -\beta) = \pi - \angle(\alpha, \beta)$,
4. $\angle(\alpha, \beta) = \angle(\gamma, \delta) \Leftrightarrow$ istnieje izometria τ przestrzeni V^n taka, że $\tau(\alpha) \uparrow\uparrow \gamma$ oraz $\tau(\beta) \uparrow\uparrow \delta$,
5. $\angle(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \uparrow\uparrow \beta$,
6. $\angle(\alpha, \beta) = \pi \Leftrightarrow \alpha \uparrow\downarrow \beta$,
7. $\angle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$,
8. $\sin \angle(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{g(\alpha, \beta)}}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}$.