

5 Izometrie przestrzeni ortogonalnych.

Twierdzenie 5.1. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\alpha, \beta \in V$ będą wektorami nieizotropowymi takimi, że $q_\xi(\alpha) = q_\xi(\beta)$. Wówczas co najmniej jeden z wektorów $\alpha + \beta$ i $\alpha - \beta$ jest nieizotropowy.

Ponadto jeśli $\alpha + \beta$ jest nieizotropowy, to $\tau_{\alpha+\beta}(\alpha) = -\beta$, zaś jeśli $\alpha - \beta$ jest nieizotropowy, to $\tau_{\alpha-\beta}(\alpha) = \beta$.

Wniosek 5.2. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\alpha, \beta \in V$ będą wektorami nieizotropowymi takimi, że $q_\xi(\alpha) = q_\xi(\beta)$. Wówczas istnieje izometria $\sigma \in O(V, \xi)$ taka, że $\sigma(\alpha) = \beta$.

Twierdzenie 5.3. (Cartana-Dieudonne) Niech k będzie ciałem, $\text{char } k \neq 2$, niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Wówczas każda izometria przestrzeni (V, ξ) jest złożeniem ortogonalnych symetrii hiperpłaszczyznowych w liczbie nie przekraczającej wymiaru przestrzeni V .

Uwaga 5.4. Niech k będzie ciałem, $\text{char } k \neq 2$, niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\sigma \in O(V, \xi)$. Jeżeli σ jest złożeniem $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{L}$ symetrii hiperpłaszczyznowych, to wówczas

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{L} \pmod{2}.$$

Definicja 5.5. Niech k będzie ciałem, $\text{char } k \neq 2$, niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\sigma \in O(V, \xi)$. Izometrię σ nazywamy **parzystą**, jeżeli jest złożeniem parzystej liczby symetrii hiperpłaszczyznowych lub **nieparzystą** w przeciwnym wypadku.

Uwaga 5.6. Niech k będzie ciałem, $\text{char } k \neq 2$, niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Zbiór wszystkich izometrii parzystych tworzy grupę, którą będziemy oznaczać przez $O^+(V, \xi)$.

Definicja 5.7. Niech k będzie ciałem, $\text{char } k \neq 2$, niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Grupę $O^+(V, \xi)$ nazywamy **specjalną grupą ortogonalną** przestrzeni (V, ξ) .