

4 Ortogonalizacja Grama-Schmidta.

Uwaga 4.1. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , $\text{char } k \neq 2$, niech $V = U \perp U^\perp$ dla pewnej podprzestrzeni $U < V$. Dla $\alpha \in V$ niech $\alpha = \alpha^\parallel + \alpha^\perp$ dla $\alpha^\parallel \in U$, $\alpha^{\langle \text{per} \rangle} \in U^\perp$. Oznaczmy przez $\sigma_U: V \rightarrow V$ symetrię ortogonalną względem U i wzdłuż $U^\perp$ daną wzorem

$$\sigma_U(\alpha^\parallel + \alpha^\perp) = \alpha^\parallel - \alpha^\perp,$$

oraz przez $\pi_U: V \rightarrow V$ rzut ortogonalny na U dany wzorem

$$\pi_U(\alpha^\parallel + \alpha^\perp) = \alpha^\parallel.$$

Ponadto niech $\alpha \in V$. Symetrię $\sigma_{\text{lin}(\alpha)^\perp}: V \rightarrow V$ względem hiperpodprzestrzeni złożonej z wektorów prostopadłych do α będziemy oznaczać przez τ_α :

$$\tau_\alpha = \sigma_{\text{lin}(\alpha)^\perp}.$$

1. $\sigma_U(\alpha) = \alpha - 2\alpha^\perp = 2\alpha^\parallel - \alpha$, $\pi_U(\alpha) = \alpha - \alpha^\perp$.

2. $\sigma_{U^\perp} = -\sigma_U$, $\pi_{U^\perp} = \text{id}_V - \pi_U$.

3. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie bazą ortogonalną podprzestrzeni U . Wówczas:

$$\begin{aligned}\sigma_U(\alpha) &= 2 \sum_{i=1}^k \frac{\xi(\alpha_i, \alpha)}{\xi(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i - \alpha, \\ \pi_U(\alpha) &= \sum_{i=1}^k \frac{\xi(\alpha_i, \alpha)}{\xi(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\sigma_{U^\perp}(\alpha) &= \alpha - 2 \sum_{i=1}^k \frac{\xi(\alpha_i, \alpha)}{\xi(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i, \\ \pi_{U^\perp} &= \alpha - \sum_{i=1}^k \frac{\xi(\alpha_i, \alpha)}{\xi(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i.\end{aligned}$$

4. W szczególności, jeśli $U = \text{lin}(\gamma)$, to wówczas

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{lin}(\gamma)}(\alpha) &= 2 \frac{\xi(\gamma, \alpha)}{\xi(\gamma, \gamma)} \gamma - \alpha, \\ \pi_{\text{lin}(\gamma)}(\alpha) &= \frac{\xi(\gamma, \alpha)}{\xi(\gamma, \gamma)} \gamma\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\tau_\gamma(\alpha) &= \sigma_{\text{lin}(\gamma)^\perp}(\alpha) = \alpha - 2 \frac{\xi(\gamma, \alpha)}{\xi(\gamma, \gamma)} \gamma, \\ \pi_{\text{lin}(\gamma)^\perp}(\alpha) &= \alpha - \frac{\xi(\gamma, \alpha)}{\xi(\gamma, \gamma)} \gamma.\end{aligned}$$

5. W szczególności, jeśli $(V, \xi) = (\mathbb{R}^n, \xi)$ jest standardową przestrzenią euklidesową w funkcjonałem $\xi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ danym wzorem

$$\xi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

oraz $\gamma = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, to wówczas

$$\tau_\gamma\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i^2} c_1 \\ \vdots \\ x_n - 2 \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i^2} c_n \end{bmatrix}$$

Definicja 4.2. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie afiniczną przestrzenią ortogonalną, niech $H = P + U$ będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni E . Odwzorowanie $\sigma_H: E \rightarrow E$ dane wzorem

$$\sigma_H(P) = P \quad \text{oraz} \quad \sigma_H(Q) = P + \sigma_U(\overrightarrow{PQ})$$

nazywamy **symetrią ortogonalną** względem H , zaś odwzorowanie $\pi_H: E \rightarrow E$ dane wzorem

$$\pi_H(P) = P \quad \text{oraz} \quad \pi_H(Q) = P + \pi_U(\overrightarrow{PQ})$$

nazywamy **rzutem ortogonalnym** na H .

Twierdzenie 4.3. (metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta) Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , która nie zawiera wektorów izotropowych. Niech $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ będzie bazą V oraz niech

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma_1, \\ \alpha_{k+1} &= \pi_{\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\perp}(\gamma_{k+1}) = \gamma_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\xi(\alpha_i, \gamma_{k+1})}{\xi(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i, k \in \{1, \dots, n-1\}.\end{aligned}$$

Wówczas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ) .

Definicja 4.4. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie dowolnym układem wektorów w przestrzeni V . Macierz $G_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in k_n^n$ daną wzorem

$$G_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = [\xi(\alpha_i, \alpha_j)]_{i,j \in \{1, \dots, k\}}$$

nazywamy **macierzą Grama** układu wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, zaś jej wyznacznik $g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ **wyznacznikiem Grama** układu wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Uwaga 4.5. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie dowolnym układem wektorów w przestrzeni V .

1. $g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = g_\xi(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(k)})$, dla dowolnej permutacji $\sigma \in S(k)$,
2. $g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = g_\xi(e_1\alpha_1, \dots, e_k\alpha_k)$, dla dowolnych $e_1, \dots, e_k \in \{\pm 1\}$.

Stwierdzenie 4.6. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech dla $k \in \mathbb{N}$ podprzestrzeń $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie nieosobliwa. Wówczas

$$g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) = a \cdot g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

gdzie

$$a = \xi(\alpha_{k+1}^\parallel, \alpha_{k+1}^\parallel) = \xi(\pi_{\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\perp}(\alpha_{k+1}), \pi_{\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^\perp}(\alpha_{k+1})).$$

Wniosek 4.7. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ będzie dowolnym układem wektorów w przestrzeni V .

1. Jeśli $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ jest liniowo zależny oraz dla $l \in \{1, \dots, k\}$ podprzestrzenie $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ są nieosobliwe, to $g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$.
2. Jeśli $g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$, to $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ jest liniowo zależny.

Twierdzenie 4.8. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V złożoną z wektorów nieizotropowych. Niech $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ będzie bazą ortogonalną otrzymaną z $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ za pomocą metody ortogonalizacji Grama-Schmidta. Wówczas

$$g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g_\xi(\beta_1, \dots, \beta_n) = \xi(\beta_1, \beta_1) \cdot \dots \cdot \xi(\beta_n, \beta_n).$$

Twierdzenie 4.9. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V . Niech

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n \\ &\vdots \\ \alpha_n &= a_{n1}\beta_1 + \dots + a_{nn}\beta_n\end{aligned}$$

i oznaczmy $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in k_n^n$. Wówczas

$$g_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(A)^2.$$