

3 Endomorfizmy afinicznych przestrzeni ortogonalnych.

Definicja 3.1. Niech k będzie ciałem. Macierz $A \in k_n^n$ nazywamy **macierzą ortogonalną**, jeśli

$$A^T A = I_n.$$

Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n nad ciałem k oznaczamy $O(n, k)$.

Uwaga 3.2. Niech k będzie ciałem.

1. $I \in O(n, k)$.
2. $A \in O(n, k) \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$.
3. $A \in O(n, k) \Rightarrow \det A = \pm 1$.
4. $A = [a_{ij}] \in O(n, k) \Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$

Uwaga 3.3. Niech k będzie ciałem. Zbiór $O(n, k)$ jest grupą.

Definicja 3.4. Niech k będzie ciałem. Grupę $o(n, k)$ nazywamy **grupą ortogonalną** stopnia n nad ciałem k .

Uwaga 3.5. Niech k będzie ciałem.

1. Niech (V_1, ξ_1) i (V_2, ξ_2) będą przestrzeniami ortogonalnymi nad ciałem k , a $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ przekształceniem liniowym. Niech $\mathcal{A}_1$ będzie bazą przestrzeni V_1 a $\mathcal{A}_2$ bazą przestrzeni V_2 , zaś A_1 i A_2 macierzami ξ_1 i ξ_2 w bazach, odpowiednio, $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Niech C będzie macierzą φ w bazach $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$. Wówczas φ jest izomorfizmem przestrzeni ortogonalnych wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_1 = \dim V_2$, $\det C \neq 0$ oraz $C^T A_1 C = A_2$.
2. Niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni (V, ξ) . Wówczas macierz przejścia od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ jest ortogonalna.
3. Niech (V, ξ) będzie nieosobliwą przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\mathcal{A}$ będzie jej bazą ortonormalną. Endomorfizm $\varphi \in \text{End } V$ jest automorfizmem przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz φ w bazie $\mathcal{A}$ jest ortogonalna.

Twierdzenie 3.6. Niech k będzie ciałem, niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , która ma bazę ortonormalną $\mathcal{A}$. Odwzorowanie $F: O(V, \xi) \rightarrow O(n, k)$ dane wzorem

$$\varphi \mapsto \text{macierz } \varphi \text{ w bazie } \mathcal{A}$$

jest izomorfizmem grup.

Definicja 3.7. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot})$ będzie przestrzenią afiniczną, a (V, ξ) przestrzenią ortogonalną. Wówczas $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ nazywamy **afiniczną przestrzenią ortogonalną**.

Układ bazowy $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ afinicznej przestrzeni ortogonalnej $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ nazywamy **prostopadłym** (odpowiednio, **ortonormalnym**) jeżeli $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą (odpowiednio, ortonormalną).

Jeżeli $(E_1, V_1, \vec{\cdot}_1, \xi_1)$ oraz $(E_2, V_2, \vec{\cdot}_2, \xi_2)$ są afinicznymi przestrzeniami ortogonalnymi, to odwzorowanie $f: E_1 \rightarrow E_2$ nazywamy **izomorfizmem**, jeżeli odwzorowanie $\tilde{f}: V_1 \rightarrow V_2$ dane wzorem

$$\tilde{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

jest izomorfizmem przestrzeni ortogonalnych. Afiniczne przestrzenie ortogonalne pomiędzy którymi istnieje izomorfizm nazywamy **izomorficznymi**.

Zbiór automorfizmów afinicznej przestrzeni ortogonalnej $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ oznaczamy $O(E, \xi)$.

Uwaga 3.8. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie afiniczną przestrzenią ortogonalną. Zbiór $O(E, \xi)$ jest grupą.

Twierdzenie 3.9. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie afiniczną przestrzenią ortogonalną, która ma unormowany układ bazowy $(O, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Endomorfizm przestrzeni afinicznej E jest automorfizmem afinicznej przestrzeni ortogonalnej wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\tilde{f}$ w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest ortogonalna.

Definicja 3.10. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie afiniczną przestrzenią ortogonalną, niech $\varphi \in \text{End } V$. Endomorfizm $\psi \in \text{End } V$ nazywamy **sprzężonym** z φ , jeżeli

$$\forall \alpha, \beta \in V \quad \xi(\varphi(\alpha), \beta) = \xi(\alpha, \psi(\beta)).$$

Uwaga 3.11. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie afiniczną przestrzenią ortogonalną, niech $\varphi \in \text{End } V$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony endomorfizm sprzężony z φ , który będziemy oznaczać przez φ^o .

Definicja 3.12. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie nieosobliwą afiniczną przestrzenią ortogonalną, niech $\varphi \in \text{End } V$. Endomorfizm φ nazywamy **samosprzężonym** jeśli $\varphi = \varphi^o$.

Twierdzenie 3.13. Niech k będzie ciałem, niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie nieosobliwą afiniczną przestrzenią ortogonalną, niech $\varphi \in \text{End } V$ i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną V . Wówczas endomorfizm φ jest samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz φ w bazie $\mathcal{A}$ jest symetryczna.

Uwaga 3.14.

1. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom endomorfizmu samosprężonego są prostopadłe.
2. Rzeczywista macierz symetryczna ma rzeczywistą wartość własną.

Twierdzenie 3.15. (o osiach głównych, spektralne) Niech $(E, V, \vec{\cdot}, \xi)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową, niech $\varphi \in \text{End } V$ będzie endomorfizmem samosprzężonym. Wówczas istnieje baza ortonormalna przestrzeni (V, ξ) złożona z wektorów własnych φ .