

## 2 Przestrzenie afiniczne.

**Definicja 2.1.** Niech  $k$  będzie ciałem,  $V$  przestrzenią liniową nad ciałem  $k$  (którą będziemy nazywać **przestrzenią wektorów swobodnych** lub **przestrzenią kierunkową**), niech  $\emptyset \neq E$  będzie pewnym zbiorem (który będziemy nazywać **zbiorem punktów**). **Przestrzenią afiniczną** nazywamy trójkę  $(E, V, \vec{\cdot})$ , gdzie  $\vec{\cdot}: E \times E \rightarrow V$  jest funkcją przyporządkowującą każdej parze punktów  $(P, Q) \in E \times E$  wektor  $\overrightarrow{PQ} \in V$  spełniającą następujące warunki:

i. aksjomat trójkąta:

$$\forall P, Q, R \in E \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR},$$

ii. aksjomat odkładania:

$$\forall P \in E \forall \alpha \in V \exists! Q \in E \quad \overrightarrow{PQ} = \alpha.$$

Będziemy pisać  $Q = P + \alpha$  jeżeli  $Q$  jest jednoznacznie wyznaczonym punktem takim, że  $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ .

## Przykład 2.2.

1. "Szkolne" przestrzenie euklidesowe 2D i 3D.
2. Przestrzeń współrzędnych  $E(k^n) = (k^n, k^n, \vec{\cdot})$ .
3.  $E(V) = (V, V, \vec{\cdot})$ .

**Definicja 2.3.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $\alpha \in V$ . Odwzorowanie  $\tau_\alpha: E \rightarrow E$  dane wzorem

$$\tau_\alpha(P) = P + \alpha$$

będziemy nazywać **translacją** (albo **przesunięciem**) o wektor  $\alpha$ .

**Definicja 2.4.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, gdzie  $V$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $k$ , niech  $a_1, \dots, a_k \in k$  będą skalarami takimi, że  $a_1 + \dots + a_k = 1$ . Układ skalarów  $(a_1, \dots, a_k)$  nazywamy **układem wag**.

**Uwaga 2.5.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, gdzie  $V$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $k$ . Niech  $P_1, \dots, P_k \in E$  będą punktami, niech  $(a_1, \dots, a_k)$  będzie układem wag. Niech  $O, O' \in E$  będą dowolnymi punktami. Wówczas

$$O + a_1 \overrightarrow{OP_1} + a_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots + a_k \overrightarrow{OP_k} = O' + a_1 \overrightarrow{O'P_1} + a_2 \overrightarrow{O'P_2} + \dots + a_k \overrightarrow{O'P_k}.$$

**Definicja 2.6.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, gdzie  $V$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $k$ . Niech  $P_1, \dots, P_k \in E$  będą punktami, niech  $(a_1, \dots, a_k)$  będzie układem wag. Wspólny dla dowolnego punktu  $O \in E$  punkt

$$O + a_1 \overrightarrow{OP_1} + a_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots + a_k \overrightarrow{OP_k}$$

nazywamy **środkiem ciężkości** układu punktów  $(P_1, \dots, P_k)$  o wagach  $(a_1, \dots, a_k)$  i oznaczamy

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k.$$

**Definicja 2.7.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $H \subseteq E$ . Podzbiór  $H$  nazywamy **podprzestrzenią afiniczną**, gdy jest zbiorem środków ciężkości pewnego układu punktów.

**Twierdzenie 2.8.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $H \subseteq E$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:

1.  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni afinicznej  $E$ ;
2. zbiór  $\{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in H\}$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej  $V$  dla dowolnego  $P \in H$ ;
3. zbiór  $\{\overrightarrow{PQ} \mid Q \in H\}$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej  $V$  dla pewnego  $P \in H$ ;
4.  $H = P + U$  dla pewnej podprzestrzeni liniowej  $U$  przestrzeni  $V$  i dowolnego  $P \in H$ ;
5.  $H = P + U$  dla pewnej podprzestrzeni liniowej  $U$  przestrzeni  $V$  i pewnego  $P \in H$ .

**Uwaga 2.9.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $\{H_i \mid i \in I\}$  będzie rodziną podprzestrzeni afinicznych przestrzeni  $E$ . Wówczas  $\bigcap_{i \in I} H_i$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $E$ .

**Definicja 2.10.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $X \subseteq E$  będzie pewnym zbiorem punktów. Najmniejszą podprzestrzeń afiniczną zawierającą zbiór  $X$  (czyli część wspólną wszystkich podprzestrzeni afinicznych zawierających zbiór  $X$ ) nazywamy **podprzestrzenią generowaną** przez zbiór  $X$  i oznaczamy przez  $\text{af}(X)$ .

**Definicja 2.11.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $H_1 = P_1 + U_1$  oraz  $H_2 = P_2 + U_2$  będą podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni  $E$ .

Mówimy, że  $H_1$  oraz  $H_2$  są **równoległe** jeżeli  $U_1 \subseteq U_2$  lub  $U_2 \subseteq U_1$ .

Mówimy, że  $H_1$  oraz  $H_2$  są **równoległe w ścisłym sensie** jeżeli  $U_1 = U_2$ .

**Definicja 2.12.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $P_1, \dots, P_k \in E$ .

Mówimy, że układ punktów  $(P_1, \dots, P_k)$  jest w **położeniu szczególnym**, jeżeli jeden z nich jest środkiem ciężkości pozostałych.

Mówimy, że układ punktów  $(P_1, \dots, P_k)$  jest w **położeniu ogólnym**, jeżeli nie jest w położeniu szczególnym.

**Twierdzenie 2.13.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $P_1, \dots, P_k \in E$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. układ punktów  $(P_1, \dots, P_k)$  jest w położeniu ogólnym;
2. dla każdego  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  układ wektorów

$$(\overrightarrow{P_{i_0}P_1}, \overrightarrow{P_{i_0}P_2}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0-1}}, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0+1}}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_k})$$

jest liniowo niezależny;

3. dla pewnego  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  układ wektorów

$$(\overrightarrow{P_{i_0}P_1}, \overrightarrow{P_{i_0}P_2}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0-1}}, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0+1}}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_k})$$

jest liniowo niezależny.

**Wniosek 2.14.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $P_1, \dots, P_k \in E$ .

1. Jeżeli układ punktów  $(P_1, \dots, P_k)$  jest w położeniu ogólnym, to wymiar przestrzeni wektorów swobodnych podprzestrzeni  $\text{af}(P_1, \dots, P_k)$  jest równy  $k$ .
2. Jeżeli  $\dim V = n$ , to istnieje układ  $n + 1$  punktów przestrzeni  $E$  będący w położeniu ogólnym, natomiast każdy układ  $n + 2$  punktów jest w położeniu szczególnym.

**Definicja 2.15.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $\dim V = n$ .

Każdy układ  $n + 1$  punktów przestrzeni  $E$  w położeniu ogólnym nazywamy **bazą punktową** przestrzeni  $E$ .

Jeżeli  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  jest bazą przestrzeni  $V$  oraz  $O \in E$ , to układ  $(O; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  nazywamy **układem bazowym** przestrzeni afinicznej  $E$ .

**Twierdzenie 2.16.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $P_0, P_1, \dots, P_n \in E$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:

1.  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  jest bazą punktową przestrzeni  $E$ ;
2. dla każdego  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$  układ wektorów

$$(\overrightarrow{P_{i_0}P_0}, \overrightarrow{P_{i_0}P_1}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0-1}}, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0+1}}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_n})$$

jest bazą przestrzeni  $V$ ;

3. dla pewnego  $i_0 \in \{0, \dots, n\}$  układ wektorów

$$(\overrightarrow{P_{i_0}P_0}, \overrightarrow{P_{i_0}P_1}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0-1}}, \overrightarrow{P_{i_0}P_{i_0+1}}, \dots, \overrightarrow{P_{i_0}P_n})$$

jest bazą przestrzeni  $V$ ;

4. dla każdego punktu  $P \in E$  istnieje jednoznacznie wyznaczony układ wag  $(a_0, \dots, a_n)$  taki, że

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \dots + a_nP_n.$$

**Definicja 2.17.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  będzie bazą punktową przestrzeni  $E$ , niech  $P \in E$ . Jednoznacznie wyznaczony układ wag  $(a_0, \dots, a_n)$  taki, że

$$P = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n$$

nazywamy **współrzędnymi barycentrycznymi** punktu  $P$  względem bazy punktowej  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ .

**Definicja 2.18.** Niech  $(E, V, \vec{\cdot})$  będzie przestrzenią afiniczną, niech  $(O; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  będzie układem bazowym przestrzeni  $E$ , niech  $P \in E$ . Jednoznacznie wyznaczony układ skalarów  $(b_1, \dots, b_n)$  taki, że

$$P = O + b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n$$

nazywamy **współrzędnymi afinicznymi** punktu  $P$  względem układu bazowego  $(O; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .