

PAWEŁ GŁADKI

Geometria

Konsultacje

Środa, 13:00 – 13:45, p. 527, Bankowa 14

lub dowolny inny termin po wcześniejszym uzgodnieniu przez email, możliwe także konsultacja zdalne przez MS Teams

Zasady zaliczania przedmiotu

- 2 kolokwia, każde warte 15 punktów
- 2 sprawdziany, każdy wart 6 punktów
- aktywność na zajęciach, warta 3 punkty
- egzamin, warty 55 punktów

Do egzaminu dopuszczeni będą ci studenci, którzy uzyskają zaliczenie z ćwiczeń na podstawie kolokwiów, sprawdzianów i aktywności. Skala ocen z ćwiczeń:

- 0 – 25 pkt: ndst
- 26 – 30 pkt: dst
- 31 – 32 pkt: dst+
- 33 – 37 pkt: db
- 38 – 39 pkt: db+
- 40 – 45 pkt: bdb

Ocena z egzaminu (a zarazem końcowa ocena modułu) będzie obliczana na podstawie punktów zdobytych na ćwiczeniach i egzaminie. Skala ocen:

- 0 – 60 pkt: ndst

- 61 – 70 pkt: dst
- 71 – 75 pkt: dst+
- 76 – 85 pkt: db
- 86 – 90 pkt: db+
- 91 – 100: bdb

Literatura

1. A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, BM 48, PWN, Warszawa 1976.
2. N. W. Jefimow, E. R. Rozendorn, *Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową*, PWN, Warszawa 1974.
3. M. Moszyńska, J. Świącicka, *Geometria z algebrą liniową*, BM 65, PWN, Warszawa 1987.
4. M. Stark, *Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej*, BM 17, PWN, Warszawa 1974.
5. K. Sieklucki, *Geometria i topologia. Część I: Geometria*, BM 53, PWN, Warszawa 1979.
6. J. Stillwell, *Geometry of surfaces*, Springer-Verlag, New York 1992.

Plan wykładu

Wykład 0. Powtórka z algebry dwuliniowej.

Funkcjonały dwuliniowe, macierz funkcyjonału dwuliniowego, diagonalizacja, formy kwadratowe. Przestrzeń ortogonalna, nieosobliwość, wektory izotropowe, homomorfizmy przestrzeni ortogonalnych. Interpretacja geometryczna.

Wykład 1. Przestrzenie afiniczne.

Podstawy geometrii afinicznej, przestrzeni, podprzestrzeni, przekształcenia afiniczne, układy punktów.

Wykład 2. Endomorfizmy afinicznych przestrzeni ortogonalnych.

Macierze ortogonalne, grupa automorfizmów ortogonalnych, endomorfizmy samosprężone, twierdzenie o osiach głównych.

Wykład 3. Ortogonalizacja Grama-Schmidta.

Symetrie i rzuty prostopadłe, bazy ortogonalne, wyznacznik Grama, metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Wykład 4. Izometrie przestrzeni ortogonalnych.

Symetrie hiperpłaszczyznowe, twierdzenie Cartana-Dieudonne.

Wykład 5. Przestrzenie unormowane.

Norma wektora, odległość, kąt między wektorami, zwrot wektora.

Wykład 6. Zorientowane przestrzenie euklidesowe.

Orientacja, kąt zorientowany, odległość punktu od zbioru, równoległościanny, miara równoległościannu.

Wykład 7. Iloczyn wektorowy.

Określenie iloczynu wektorowego, wybrane zastosowania.

Wykład 8. Hiperpowierzchnie stopnia drugiego.

Określenie hiperpowierzchni stopnia 2, klasyfikacja hiperpowierzchni.

Wykład 9. Własności geometryczne hiperpowierzchni stopnia 2.

Środek hiperpowierzchni, hiperpowierzchnie centralne, kierunki asymptotyczne, punkty osobliwe, hiperpłaszczyzny styczne.

Wykład 10. Krzywe stopnia drugiego.

Hiperbole, parabole i elipsy oraz ich wybrane własności geometryczne.

Wykład 11. Powierzchnie stopnia drugiego.

Walce i powierzchnie obrotowe, powierzchnie nieobrotowe, kwadryki.

Wykład 12. Geometria przestrzeni euklidesowych.

Struktura grupy izometrii płaszczyzny, przestrzenie metryczne, powierzchnie euklidesowe i lokalnie euklidesowe.

Wykład 13. Klasyfikacja powierzchni euklidesowych.

Własności podgrup grupy izometrii, twierdzenie Killinga-Hopfa.

Wykład 14. Geometria sferyczna.

Grupa izometrii sfery, przestrzenie lokalnie sferyczne, związki z płaszczyzną zespoloną, inwersje, wzór Gaussa-Bonneta.

Wykład 15. Geometria rzutowa.

Przestrzenie i przekształcenia jednorodne, przestrzenie i izomorfizmy rzutowe, hiperpłaszczyzny rzutowe i rzutowa zależność punktów.

1 Powtórka z algebry dwuliniowej.

Definicja 1.1. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k . **Funkcjonałem dwuliniowym** nazywamy funkcję $\xi: V \times V \rightarrow k$ taką, że dla dowolnego wektora $\alpha \in V$ odwzorowania $\xi(\alpha, \cdot)$ oraz $\xi(\cdot, \alpha)$ są liniowe.

Funkcjonał nazywamy **symetrycznym** jeżeli

$$\forall \alpha, \beta \in V \quad \xi(\alpha, \beta) = \xi(\beta, \alpha).$$

Formę kwadratową $q_\xi: V \rightarrow k$ wyznaczoną przez funkcjonał symetryczny ξ definiujemy wzorem:

$$q_\xi(\alpha) = \xi(\alpha, \alpha),$$

dla $\alpha \in V$.

Uwaga 1.2. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k , $\xi: V \times V \rightarrow k$ funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym. Zachodzi związek:

$$2\xi(\alpha, \beta) = q_\xi(\alpha + \beta) - q_\xi(\alpha) - q_\xi(\beta),$$

dla $\alpha, \beta \in V$. W szczególności, jeśli w ciele k zachodzi $0 \neq 2$, to

$$\xi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[q_\xi(\alpha + \beta) - q_\xi(\alpha) - q_\xi(\beta)],$$

dla $\alpha, \beta \in V$.

Definicja 1.3. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k , $\xi: V \times V \rightarrow k$ funkcjonałem dwuliniowym. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V . **Macierz funkcjonału** ξ w bazie $\mathcal{A}$ definiujemy jako $[a_{ij}] \in k_n^n$ wzorem

$$a_{ij} = \xi(\alpha_i, \alpha_j),$$

dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Uwaga 1.4. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k , $\xi: V \times V \rightarrow k$ funkcjonałem dwuliniowym, niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V , a $A \in k_n^n$ macierzą ξ w bazie $\mathcal{A}$. Wówczas

$$\xi\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j\right) = [x_1 \ \cdots \ x_n] A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

dla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in k$.

Twierdzenie 1.5. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k , $\xi: V \times V \rightarrow k$ funkcjonałem dwuliniowym, niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V . Niech A będzie macierzą ξ w bazie $\mathcal{A}$, B macierzą ξ w bazie $\mathcal{B}$, zaś C macierzą przejścia od bazy $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Wówczas:

$$B = C^T A C.$$

Definicja 1.6. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k , $\xi: V \times V \rightarrow k$ funkcjonałem dwuliniowym, niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V , a A macierzą ξ w bazie $\mathcal{A}$. Funkcjonał ξ nazywamy **nieosobliwym** jeżeli spełniony jest jeden (a zatem wszystkie) z poniższych równoważnych warunków:

i. $r(A) = \dim V$,

ii. $\det A \neq 0$,

iii. $\forall 0 \neq \alpha \in V \exists \beta \in V \quad \xi(\alpha, \beta) \neq 0$,

iv. $\forall 0 \neq \alpha \in V \exists \beta \in V \quad \xi(\beta, \alpha) \neq 0$.

Definicja 1.7. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ funkcjonalem dwuliniowym. Funkcjonał ξ nazywamy **dodatnio określonym**, jeżeli

$$\forall 0 \neq \alpha \in V \quad \xi(\alpha, \alpha) > 0.$$

Analogicznie definiujemy funkcjonały ujemnie, niedodatnio i nieujemnie określone.

Definicja 1.8. Niech k będzie ciałem, V przestrzenią liniową nad ciałem k , $\xi: V \times V \rightarrow k$ funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym i niech $\dim V < \infty$. Parę (V, ξ) nazywamy **przestrzenią ortogonalną** nad ciałem k .

Przestrzeń ortogonalną nazywamy **nieosobliwą**, gdy ξ jest nieosobliwy.

Jeżeli $k = \mathbb{R}$ oraz funkcjonał ξ jest dodatnio określony, to przestrzeń (V, ξ) nazywamy **przestrzenią euklidesową**.

Uwaga 1.9. Każda przestrzeń euklidesowa jest nieosobliwa.

Definicja 1.10. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Wektory α i β , $\alpha, \beta \in V$, nazywamy **ortogonalnymi**, co oznaczamy przez $\alpha \perp \beta$, jeśli

$$\xi(\alpha, \beta) = 0.$$

Zbiory $A, B \subseteq V$ nazywamy **ortogonalnymi**, co oznaczamy przez $A \perp B$, jeżeli $\alpha \perp \beta$, dla wszystkich $\alpha \in A, \beta \in B$.

Uwaga 1.11. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Relacja $\perp$ jest symetryczna, niezwrotna i nieprzechodnia.

Definicja 1.12. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $A \subseteq V$. **Dopełnieniem ortogonalnym** zbioru wektorów A nazywamy zbiór

$$A^\perp = \{\alpha \in V \mid \forall \beta \in A \quad \alpha \perp \beta\}.$$

Uwaga 1.13. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k .

1. Niech $A \subseteq V$. Wówczas $A^\perp$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V .
2. Niech $W < V$ będzie podprzestrzenią. Wówczas

$$\dim W^\perp \geq \dim V - \dim W,$$

przy czym jeśli (V, ξ) jest nieosobliwa, to zachodzi równość.

Definicja 1.14. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $V_1, \dots, V_k$ będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Mówimy, że V jest **sumą prostą ortogonalną** podprzestrzeni $V_1, \dots, V_k$, jeżeli

i. $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$,

ii. $V_i \perp V_j$, dla $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Uwaga 1.15. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech V będzie sumą prostą ortogonalną podprzestrzeni $V_1, \dots, V_k$, niech A będzie macierzą ξ w pewnej bazie. Wówczas

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & & & \\ \hline & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{array} \right],$$

gdzie A_i jest macierzą funkcjonału $\xi|_{V_i \times V_i}$ w pewnej bazie przestrzeni V_i , $i \in \{1, \dots, k\}$.

Definicja 1.16. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $V_1 < V$ będzie podprzestrzenią. Jeżeli

$$V = V_1 \perp V_2$$

dla pewnej podprzestrzeni $V_2 < V$, to V_2 nazywamy **uzupełnieniem ortogonalnym** podprzestrzeni V_1 do V .

Uwaga 1.17. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $V_1 < V$ będzie podprzestrzenią. Uzupełnienie ortogonalne V_1 do V istnieje, gdy przestrzeń $(V_1, \xi|_{V_1})$ jest nieosobliwa.

Definicja 1.18. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $V = V_1 \perp V_2$ dla pewnych podprzestrzeni $V_1, V_2 < V$.

Odwzorowanie $\sigma: V \rightarrow V$ zdefiniowane wzorem

$$\sigma_{V_1}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2,$$

dla $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, nazywamy **symetrią ortogonalną** względem podprzestrzeni V_1 wzdłuż uzupełnienia ortogonalnego.

Odwzorowanie $\pi: V \rightarrow V$ zdefiniowane wzorem

$$\pi_{V_1}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1,$$

dla $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$, nazywamy **rzutem ortogonalnym** na podprzestrzeń V_1 .

Definicja 1.19. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Bazę $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni V nazywamy **bazą ortogonalną** przestrzeni (V, ξ) , jeżeli

$$\alpha_i \perp \alpha_j,$$

dla $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Bazę ortogonalną nazywamy **na wpół unormowaną**, jeżeli

$$\xi(\alpha_i, \alpha_i) \in \{-1, 0, 1\},$$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz **unormowaną**, jeżeli

$$\xi(\alpha_i, \alpha_i) \in \{0, 1\},$$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Uwaga 1.20. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Jeżeli $2 \neq 0$ w ciele k , to (V, ξ) ma bazę ortogonalną.

Definicja 1.21. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . **Radykałem** przestrzeni V nazywamy dopełnienie ortogonalne $V^\perp$ i oznaczamy $\text{rad } V$.

Uwaga 1.22. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech A będzie macierzą ξ w pewnej bazie.

1. Przestrzeń (V, ξ) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rad } V = \{0\}$.
2. $\dim V = r(A) + \dim \text{rad } V$.

Notacja 1.23. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem $\mathbb{R}$, niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą ortogonalną przestrzeni (V, ξ) . Oznaczmy:

$$r^+(\mathcal{A}) = |\{\alpha_i \mid \xi(\alpha_i, \alpha_i) > 0\}|$$

oraz

$$r^-(\mathcal{A}) = |\{\alpha_i \mid \xi(\alpha_i, \alpha_i) < 0\}|.$$

Twierdzenie 1.24. (o bezwładności) Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem $\mathbb{R}$, niech $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ będą bazami ortogonalnymi. Wówczas

$$r^+(\mathcal{A}) = r^+(\mathcal{B})$$

oraz

$$r^-(\mathcal{A}) = r^-(\mathcal{B}).$$

Wspólną dla dowolnych baz $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ wartość $r^+(\mathcal{A}) = r^+(\mathcal{B})$ oznaczamy przez $r^+(\xi)$, zaś wartość $r^-(\mathcal{A}) = r^-(\mathcal{B})$ przez $r^-(\xi)$.

Definicja 1.25. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem $\mathbb{R}$. **Sygnaturą** przestrzeni (V, ξ) nazywamy różnicę

$$s(\xi) = r^+(\xi) - r^-(\xi).$$

Twierdzenie 1.26. (Jacobiego) Niech k będzie ciałem, w którym $2 \neq 0$, niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , $\dim V = n$, niech A będzie macierzą ξ w pewnej bazie. Niech A_i oznacza macierz powstałą z A przez odrzucenie $n - i$ ostatnich wierszy i kolumn. Jeżeli $\det A_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, to wówczas istnieje baza ortogonalna, w której macierz ξ ma postać

$$\begin{bmatrix} \det A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\det A_2}{\det A_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\det A_n}{\det A_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1.27. (kryterium Sylwestera) Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem $\mathbb{R}$, $\dim V = n$, niech A będzie macierzą ξ w pewnej bazie. Niech A_i oznacza macierz powstałą z A przez odrzucenie $n - i$ ostatnich wierszy i kolumn. Wówczas

1. ξ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. ξ jest ujemnie określony wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^i \det A_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definicja 1.28. Niech k będzie ciałem, (V_1, ξ_1) i (V_2, ξ_2) przestrzeniami ortogonalnymi nad ciałem k . Funkcję $f: V_1 \rightarrow V_2$ nazywamy **izometrią** przestrzeni ortogonalnych, jeżeli:

i. jest izomorfizmem przestrzeni liniowych,

ii. $\forall \alpha, \beta \in V \quad \xi_1(\alpha, \beta) = \xi_2(f(\alpha), f(\beta))$.

Przestrzenie nazywamy **izometrycznymi**, jeżeli istnieje między nimi izometria, co oznaczamy $(V_1, \xi_1) \cong (V_2, \xi_2)$.

Uwaga 1.29. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Zbiór wszystkich izometrii $f: V \rightarrow V$ przestrzeni (V, ξ) tworzy grupę z działaniem składania odwzorowań, którą oznaczamy przez $O(V, \xi)$.

Definicja 1.30. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Grupę $O(V, \xi)$ nazywamy **grupą ortogonalną** przestrzeni (V, ξ) .

Definicja 1.31. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k . Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **izotropowym**, jeżeli $\alpha \perp \alpha$.

Uwaga 1.32. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Wówczas

$$V = \text{lin}(\alpha) \perp \text{lin}(\alpha)^\perp$$

i symetria ortogonalna $\sigma_{\text{lin}(\alpha)}: V \rightarrow V$ względem prostej $\text{lin}(\alpha)$, którą będziemy oznaczać krótko przez σ_α , wyraża się wzorem

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\xi(\alpha, \beta)}{\xi(\alpha, \alpha)} \alpha,$$

dla $\beta \in V$.

Uwaga 1.33. Niech k będzie ciałem, (V, ξ) przestrzenią ortogonalną nad ciałem k , niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym, niech $\sigma_\alpha: V \rightarrow V$ będzie symetrią ortogonalną względem prostej $\text{lin}(\alpha)$. Wówczas:

1. $\sigma_\alpha \in O(V, \xi)$,
2. $\sigma_\alpha(\alpha) = \alpha$,
3. $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \perp \alpha$.

Twierdzenie 1.34. Niech (V_1, ξ_1) i (V_2, ξ_2) będą przestrzeniami ortogonalnymi nad ciałem $\mathbb{R}$, niech A_1 i A_2 będą macierzami, odpowiednio, ξ_1 i ξ_2 w pewnych bazach. Wówczas $(V_1, \xi_1) \cong (V_2, \xi_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $\dim V_1 = \dim V_2$,

2. $r(A_1) = r(A_2)$,

3. $s(\xi_1) = s(\xi_2)$.

Twierdzenie 1.35. Niech (V_1, ξ_1) i (V_2, ξ_2) będą przestrzeniami ortogonalnymi nad ciałem $\mathbb{C}$, niech A_1 i A_2 będą macierzami, odpowiednio, ξ_1 i ξ_2 w pewnych bazach. Wówczas $(V_1, \xi_1) \cong (V_2, \xi_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $\dim V_1 = \dim V_2$,

2. $r(A_1) = r(A_2)$.