

ZESTAW ZADAŃ 2: HOMOMORFIZMY MODUŁÓW. MODUŁ ILORAZOWY, TWIERDZENIE O
HOMOMORFIZMIE.

- (1) Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\phi : M \rightarrow N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Pokazać, że wówczas:
 - (a) $\phi(M_1) < N$;
 - (b) $\phi^{-1}(N_1) < M$.
- (2) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N \subset M$. Pokazać, że wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem pewnego homomorfizmu.
- (3) Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami, $\pi : M \rightarrow N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Pokazać, że wówczas odwzorowania

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1), \\ \psi : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{M}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N_1) \end{aligned}$$

są wzajemnie odwrotne.

- (4) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N < M$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} m + N &= \{m + n : n \in N\}, \\ M/N &= \{m + N : m \in M\} \end{aligned}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodawania i mnożenia zewnętrznego:

$$\begin{aligned} (m_1 + N) + (m_2 + N) &= (m_1 + m_2) + N, \\ a(m + N) &= am + N. \end{aligned}$$

Pokazać, że wówczas M/N jest lewym R -modułem.

- (5) Pokazać, że homomorfizm modułów jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjekcją.
- (6) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$. Pokazać, że wówczas

$$N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

- (7) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Pokazać, że wówczas

$$M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1).$$

Zadanie domowe: zadania 5, 6 i 7 należy rozwiązać na następne zajęcia.