

1. WYKŁAD 1: POJĘCIE MODUŁU. PODMODUŁY. PODMODUŁY GENEROWANE PRZEZ ZBIÓR.

Definicja 1.1. Niech R będzie pierścieniem, M addytywną grupą przemenną. M nazywamy **lewym R -modułem**, jeżeli na M określone jest działanie zewnętrzne z pierścieniem skalarów $R \cdot : R \times M \rightarrow M$ takie, że

- (1) $\forall a \in R \forall m_1, m_2 \in M [a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2]$,
- (2) $\forall a_1, a_2 \in R \forall m \in M [(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m]$,
- (3) $\forall a_1, a_2 \in R \forall m \in M [(a_1a_2)m = a_1(a_2m)]$.

Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką i spełniony jest dodatkowo warunek

- (4) $\forall m \in M (1m = m)$,

to M nazywamy **lewym unitarnym R -modułem**. W analogiczny sposób definiujemy **prawy R -moduł** i **prawy unitarny R -moduł**.

Uwaga 1.1. Niech R będzie pierścieniem, M lewym unitarnym R -modułem. Wówczas:

- (1) $\forall a_1, a_2 \in R \forall m \in M [(a_1 - a_2)m = a_1m - a_2m]$,
- (2) $\forall m \in M (0m = 0)$.

Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką, a M lewym unitarnym R -modułem, to

- (3) $\forall m \in M [(-1)m = -m]$.

Dowód. (1) Ustalmy $a_1, a_2 \in R, m \in M$. Wówczas $(a_1 - a_2)m + a_2m = (a_1 - a_2 + a_2)m = a_1m$.

(2) Wynika z (1) dla $a_1 = a_2 = 1$.

(3) Wynika z (1) dla $a_1 = 0, a_2 = 1$.

□

Uwaga 1.2. Niech R będzie pierścieniem, M addytywną grupą przemenną. Wówczas M jest lewym R -modułem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm pierścieni $\phi : R \rightarrow \text{End}M$.

Dowód. ($\Rightarrow$): Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : R \rightarrow \text{End}M$ wzorem

$$\phi(a)(m) = am.$$

Z łatwością sprawdzamy, że wówczas ϕ jest homomorfizmem.

($\Leftarrow$): Zdefiniujmy działanie $\cdot : R \times M \rightarrow M$ wzorem

$$a \cdot m = \phi(a)(m).$$

Z łatwością sprawdzamy, że wówczas M jest lewym R -modułem.

□

Przykłady:

- (1) Niech F będzie ciałem, V przestrzenią wektorową nad ciałem F . Wówczas V jest lewym unitarnym F -modułem.
- (2) Niech A będzie addytywną grupą abelową. Wówczas A jest lewym unitarnym $\mathbb{Z}$ -modułem.
- (3) Niech R będzie pierścieniem, I ideałem lewostronnym w R . Wówczas I jest lewym R -modułem.
- (4) Niech R będzie pierścieniem. Wówczas R jest lewym R -modułem.
- (5) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $\tau \in \text{End}V$, niech $\phi : F[x] \rightarrow \text{End}V$ będzie dane wzorem $\phi(f) = f(\tau)$. Wówczas V jest lewym unitarnym $F[x]$ -modułem.

Definicja 1.2. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem. Podzbiór N zbioru M nazywamy **podmodułem** modułu M , gdy $(N, \cdot|_{R \times N})$ jest lewym R -modułem. Oznaczamy $N < M$.

Przykłady:

- (6) Niech F będzie ciałem, V przestrzenią wektorową nad ciałem F , W podprzestrzenią przestrzeni V . Wówczas W jest podmodułem V .
- (7) Niech A będzie addytywną grupą abelową, B podgrupą grupy A . Wówczas B jest podmodułem A .
- (8) Niech R będzie pierścieniem, I ideałem lewostronnym w R . Wówczas I jest podmodułem modułu R .
- (9) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $\tau \in \text{End}V$, niech W będzie podprzestrzenią τ -niezmienniczą przestrzeni V . Wówczas W jest podmodułem $F[x]$ -modułu V .
- (10) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, I ideałem lewostronnym R . Wówczas $IM = \{a_1m_1 + \dots + a_nm_n : a_i \in I, m_i \in M\} \leq M$.

Twierdzenie 1.1. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $\mathcal{R} = \{N_i : i \in I\}$ rodziną podmodułów modułu M . Wówczas:

- (1) $\bigcap_{i \in I} N_i$ jest podmodułem modułu M ,
- (2) $\bigcup_{i \in I} N_i$ jest podmodułem modułu M , o ile $\mathcal{R}$ jest łańcuchem.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja 1.3. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem oraz $A \subset M$ pewnym zbiorem. Najmniejszy w sensie inkluzji podmoduł modułu M zawierający zbiór A (tj. przekrój wszystkich podmodułów modułu M zawierających A) nazywamy **podmodułem generowanym przez A** i oznaczamy $\langle A \rangle$.

Każdy zbiór A o tej własności, że $\langle A \rangle = M$ nazywamy **zbiorem generatorów modułu M** . Jeśli $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ to oznaczamy

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle A \rangle.$$

Mówimy, że moduł jest **skończenie generowany** (odpowiednio, **cykliczny**), gdy istnieje skończony (odpowiednio, jednoelementowy) zbiór jego generatorów.

Twierdzenie 1.2 (o postaci elementów podmodułu generowanego przez zbiór). Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem oraz $A \subset M$ pewnym zbiorem. Wówczas

$$\langle A \rangle = \{r_1a_1 + \dots + r_na_n + k_1b_1 + \dots + k_mb_m : n, m \in \mathbb{N}, r_i \in R, a_i, b_i \in A, k_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką, a M unitarnym R -modułem, to wówczas:

$$\langle A \rangle = \{r_1a_1 + \dots + r_na_n : n \in \mathbb{N}, r_i \in R, a_i \in A\}.$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Przykłady:

- (11) Niech F będzie ciałem, V przestrzenią wektorową nad ciałem F . Każda podprzestrzeń jednowymiarowa jest podmodułem cyklicznym. Każda podprzestrzeń skończeniowymiarowa jest podmodułem skończenie generowanym.
- (12) Niech A będzie addytywną grupą abelową. Każda podgrupa cykliczna jest podmodułem cyklicznym.
- (13) Niech R będzie pierścieniem. Każdy ideał główny jest podmodułem cyklicznym.
- (14) Niech V będzie skończeniowymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem F , niech $\tau \in \text{End}V$. Wówczas $F[x]$ -moduł V jest skończenie generowany.

Definicja 1.4. Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 \leq M$. Podmoduł $\langle N_1 \cup N_2 \rangle$ nazywamy **sumą algebraiczną N_1 i N_2** i oznaczamy $N_1 + N_2$.

Twierdzenie 1.3 (o postaci elementów sumy algebraicznej podmodułów). *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $N_1, N_2 < M$. Wówczas:*

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 : n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}.$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 1.4 (Dedekinda). *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $K, L, N < M$ i niech $K \supset L$. Wówczas*

$$K \cap (L + N) = L + K \cap N.$$

Dowód. Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, skupmy się na dowodzie inkluzji $(\subset)$. Ustalmy $x \in K \cap (L + N)$. Ponieważ w szczególności $x \in L + N$, więc $x = y + z$ dla pewnych $y \in L$, $z \in N$. Stąd $z = x - y \in K$, skoro $x \in K$ oraz $y \in L \subset K$. Zatem $z \in K \cap N$ i tym samym $x \in L + K \cap N$. $\square$