

Zestaw 8: ciągi

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich parzystych liczb całkowitych dodatnich nie większych od 1000 i niepodzielnych przez 3.

Zadanie 2. W pewnym ciągu geometrycznym (a_n) wyraz a_4 jest osiem razy większy od wyrazu a_1 . Drugi wyraz tego ciągu jest równy 6. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną k taką, że $a_k > 100$.

Zadanie 3. Dla jakiej wartości x trójwyrazowy ciąg $(x+1, x-1, 2x)$ jest arytmetyczny?

Zadanie 4. W ciągu arytmetycznym (a_n) dla $n \geq 1$, $a_1 = 8$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 = 33$. Ile wynosi suma $a_4 + a_5 + a_6$?

Zadanie 5. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dana jest wzorem $S_n = \frac{n^2 - 25n}{4}$, gdzie $n \geq 1$. Różnica ciągu arytmetycznego (b_n) jest równa $\frac{3}{2}$ oraz piąty wyraz jest równy 8. Wyznacz sumę pierwszych 17 wyrazów ciągu (c_n) wiedząc, że $c_n = 2b_n - a_8$, $n \geq 1$.

Zadanie 6. Suma 23 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) dla $n \geq 1$ jest równa 1564. Oblicz średnią arytmetyczną wyrazów a_3 i a_{21} .

Zadanie 7. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (b_n) , określony dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $b_n = 2a_{n+2} + 4a_{n+4}$ jest arytmetyczny.

Zadanie 8. Skończony ciąg arytmetyczny ma nieparzystą liczbę wyrazów. Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że środkowy wyraz jest dzielnikiem sumy tych wyrazów.

Zadanie 9. W ciągu geometrycznym rosnącym pierwszy wyraz jest równy (-16) , a siódmy wyraz jest równy $(-\frac{1}{4})$. Ile wynosi kwadrat czwartego wyrazu?

Zadanie 10. W ciągu geometrycznym (a_n) , w którym $a_1 = 1$, znane są wartości dwóch wyrazów: $a_k = 16$ i $a_{k+2} = 32$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Wyznacz a_{10} .

Zadanie 11. Kacper przez 5 dni zapisywał swoje wydatki. Zauważył, że każdego dnia wydatki były niższe o 20% w stosunku do wydatków poprzedniego dnia. Oblicz kwotę, jaką Kacper wydał w tym czasie, jeśli piątego dnia wydał 20,48 zł.

Zadanie 12. W ciągu geometrycznym (a_n) o różnych i niezerowych wyrazach różnica między wyrazami piątym i trzecim jest trzy razy większa niż różnica między wyrazami czwartym i trzecim. Oblicz iloraz ciągu (a_n) .

Zadanie 13. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach różnych od zera, określony dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (b_n) , określony dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $b_n = a_n(2a_{n+2})^2$, jest geometryczny.

Zadanie 14. Dana jest funkcja wykładnicza $f(x) = 2^x$ oraz ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = f(3n)$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny i oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 15. Skończony ciąg $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ jest geometryczny. Uzasadnij, że mając dany tylko wyraz środkowy a_3 , można obliczyć iloczyn wszystkich wyrazów tego ciągu.