

Zestaw 6: wyrażenia, równania i nierówności wymierne oraz niewymierne.

Zadanie 1. Rozłożyć na czynniki wyrażenia:

- a) $xy + yz + x + z$,
- b) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$,
- c) $(a - b)(p - a)(p - b) + bp(p - b) - ap(p - a)$,
- d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$,
- e) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli $a + b + c = 0$, to

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Zadanie 3. Uprościć wyrażenia:

- a) $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$,
- b) $\frac{1}{(x+y)^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$,
- c) $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c} \right); \frac{c(1+c)a}{bc}$,
- d) $\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1 \right) \frac{ab}{a^2+b^2}$,
- e) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

Zadanie 4. Uprościć wyrażenia:

- a) $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right)$,
- b) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} \right) \left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}} + 1 \right)$,
- c) $\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a+1}}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a+1}}; \frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1} + 1$,
- d) $\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}+1} \right) \frac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1}$,
- e) $\left(\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} + (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \right)^{-2}$.

Zadanie 5. Rozwiązać równania:

- a) $\frac{3(2-x)}{4x-3} = \frac{3}{2}$,

- b) $\frac{x-2}{x^2-3x+2}=0$,
- c) $x^4+4x^3-18x^2-12x+9=0$,
- d) $x^2+\frac{25x^2}{(5+2x)^2}-\frac{74}{49}=0$,
- e) $x^3+\frac{1}{x^3}=6\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

Zadanie 6. Rozwiązać nierówności:

- a) $x < \frac{1}{x}$,
- b) $\frac{2}{x-1} < \frac{3}{x}$,
- c) $\frac{14}{x^2-5x+6} < \frac{10}{2-x} - 3$,
- d) $\left|\frac{1}{x+2}\right| < \left|\frac{2}{x-1}\right|$,
- e) $|x^3-1| < x^2+x+1$.

Zadanie 7. Rozwiązać układy równań:

- a)
$$\begin{cases} xy &= x^2y^2 \\ 3(x^2y+xy^2) &= 5(x-y) \end{cases},$$
- b)
$$\begin{cases} x^2+3xy &= 54 \\ xy+4y^2 &= 115 \end{cases},$$
- c)
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 1 \\ xy+xz+yz &= 27 \end{cases},$$
- d)
$$\begin{cases} x(x+y) &= 3 \\ x(x+z) &= 1, \\ x(y+z) &= 2 \end{cases},$$
- e)
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 1 \\ x+y+z &= 1 \\ xyz &= -1 \end{cases}.$$

Zadanie 8. Rozwiązać równania:

- a) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$,
- b) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$,
- c) $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3$,
- d) $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12$,

e) $\sqrt{x+1} + x^2 - 2x - 1 = 0.$

Zadanie 9. Rozwiązać nierówności:

a) $\sqrt{1+x^2} \geq x+1,$

b) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4,$

c) $\sqrt{x+2} > \sqrt{2x-8},$

d) $(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x,$

e) $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2.$

Zadanie 10. Rozwiązać układy równań:

a)
$$\begin{cases} x-y &= \frac{7}{2}(\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} &= 3 \end{cases},$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{3}{2}, \\ x+xy+y &= 9 \end{cases},$$

c)
$$\begin{cases} 5\sqrt{x+y} - \frac{18}{\sqrt{x+y}} &= 27 \\ \sqrt{x^2-y^2} - 5\sqrt{x-y} &= 4 \end{cases},$$

d)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} &= 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 4 \end{cases},$$

e)
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= 4\sqrt{7} \\ \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} &= (\sqrt{41}-3)7 \end{cases}.$$