

Zestaw 3: planimetria.

- Zadanie 1.** Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu 4. Kąt CAB jest równy kątowi OCB oraz kąt CBA jest równy kątowi OCA . Oblicz długość wysokości CD opuszczonej z wierzchołka C na bok AB .
- Zadanie 2.** Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie O i promieniu r . Cięciwa AC ma długość $r\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta $\angle BOC$.
- Zadanie 3.** Punkty A, B, C, D, E są położone w tej kolejności na okręgu o środku O . Odcinki BD i AC są średnicami tego okręgu oraz miara kąta $\angle BEC$ wynosi 60° . Oblicz miarę kąta $\angle CBD$.
- Zadanie 4.** Punkty A, B, C, D są położone w tej kolejności na okręgu o środku O . Odcinek DB jest średnicą tego okręgu i $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBD = \beta$. Wykaż, że $\alpha + \beta = 90^\circ$.
- Zadanie 5.** Parami różne punkty A, B, C, D, E leżą na okręgu. Odcinki DE i AC są równoległe, zaś odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Wykaż, że prosta BE zawiera wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok AC .
- Zadanie 6.** Końce odcinka AB o długości 9 są środkami okręgów o promieniach 6 i 4. Punkt C leży na odcinku AB i jest środkiem takiego okręgu, o promieniu większym od 6, że dwa dane okręgi są do niego wewnętrznym styczne. Oblicz promień okręgu o środku C .
- Zadanie 7.** Dwa okręgi o promieniach r i R są styczne zewnętrznie i są styczne do wspólnej prostej w punktach A i B . Oblicz wartość iloczynu rR , jeżeli wiadomo, że odcinek AB ma długość 5.
- Zadanie 8.** Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie: okrąg O_1 o środku S i promieniu równym 6 oraz okrąg O_2 o środku T i promieniu długości 2. Z punktu S poprowadzono półprostą styczną do okręgu O_2 w punktach K i L . Oblicz pole czworokąta $SKTL$.
- Zadanie 9.** Pole trójkąta ABC równe jest S . Każdy bok trójkąta podzielono w stosunku $x : y : x$, gdzie x i y są pewnymi liczbami dodatnimi. Wyznacz pole sześciokąta, którego wierzchołkami są punkty podziałów boków trójkąta.
- Zadanie 10.** Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym przyprostokątna AC ma długość 12. Punkt E jest środkiem przeciwprostokątnej AB , spodek D wysokości CD leży między punktami A i E , a odległość między punktami D i E jest równa 1. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Zadanie 11.** W trójkącie ABC o bokach długości $|AC| = b$, $|BC| = a$ i kącie między nimi 60° poprowadzono dwusieczną kąta $\angle ACB$, która przecięła bok AB w punkcie D . Zapisz długość odcinka CD w zależności od a i b .
- Zadanie 12.** Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ taki, że kąty przy wierzchołkach A i D są proste oraz $|AB| = 10$, $|DC| = 6$, a przekątna AC jest dwa razy dłuższa od ramienia DA . Na podstawie AB obrano taki punkt X , że $|CX| = |CB|$. Oblicz sinus kąta XCB .
- Zadanie 13.** Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie C . W trójkątach ABC i CDE zachodzą związki: $|\angle CAB| = |\angle CED|$, $|AC| = 5$, $|BC| = 3$, $|CE| = 10$. Wykaż, że trójkąty ABC i CDE są podobne. Oblicz długość boku CD .
- Zadanie 14.** W trapezie $ABCD$ rozważmy wysokości DE i CF . Punkt F jest środkiem podstawy AB , a punkt E dzieli tę podstawę w stosunku $2 : 5$. Wykaż, że punkt przecięcia wysokości CF z przekątną DB dzieli tę przekątną w stosunku $3 : 7$, licząc od wierzchołka D .
- Zadanie 15.** Trójkąt o boku a i kącie ostrym α , leżącym naprzeciw tego boku, jest wpisany w okrąg o promieniu R , zaś trójkąt o boku $a + 1$ i kącie ostrym α , leżącym naprzeciw tego boku, jest wpisany w okrąg o promieniu $R + 1$. Wyznacz miarę kąta α .