

Zadania ze wstępu do algebry liniowej i geometrii analitycznej

Zestaw 1

- W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ oblicz:
(a) $[1, 2] + [1, 4]$, (b) $4[1, 3]$, (c) $-[4, 3]$, (d) $[2, 0] - [3, 1]$.
- W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ rozwiąż równanie:
(a) $\mathbf{x} + [5, 4] = [3, 1]$, (b) $[2, 6] - \mathbf{x} = [1, 0]$, (c) $5\mathbf{x} = [5, 2]$, (d) $4\mathbf{x} = [6, 1]$.
- W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ oblicz:
(a) $[7, 1, 8] + [1, 6, 0]$, (b) $5[1, -1, 0]$, (c) $-[1, 0, 4]$, (d) $[1, 3, 0] - [1, 5, -1]$, (e) $5[9, 3, 1] - 7[5, 1, 0]$.
- W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ rozwiąż równanie:
(a) $\mathbf{x} + [7, 2, 0] = [8, 7, 5]$, (b) $[9, 6, 3] - \mathbf{x} = [5, 1, 7]$, (c) $3\mathbf{x} = [9, -12, 0]$, (d) $4\mathbf{x} + [1, 1, 6] = [5, 13, 6]$.
- Niech K będzie ciałem. Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
(a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$,
(b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$,
(c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,
(d) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0\}$,
(e) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0 \text{ i } 2x+y=0\}$,
(f) $U = \{[x, y, z, t] : xy=0\}$,
(g) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.
- Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
(a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\}$,
(b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
(c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.
- Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$ są podprzestrzeniami liniowymi:
(a) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 1]\}$,
(b) $U = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$,
(c) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 2]\}$.
- Jakiej postaci są wektory należące do warstwy $[1, 1] + W$, gdzie $W = \{[u, u+t] : u, t \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2$.
- Dana jest podprzestrzeń $U = \text{Sol}(X - Y = 0)$ przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$. Wypisz wszystkie wektory należące do warstwy $[1, 2] + U$.
- W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznacz kombinację liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ o współczynnikach odpowiednio a_1, a_2, a_3 , gdzie:
(a) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [-2, 3]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2]$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$,
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 0]$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.
- Sprawdź czy wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, jeśli:
(a) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, -1]$;
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 0]$, $\mathbf{w} = [1, 1, 2]$.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie:
(a) $\mathbf{v}_1 = [2, 3, 5]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 7, 8]$, $\mathbf{v}_3 = [1, -6, 1]$, $\mathbf{w} = [7, -2, a]$;
(b) $\mathbf{v}_1 = [4, 4, 3]$, $\mathbf{v}_2 = [7, 2, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [4, 1, 6]$, $\mathbf{w} = [5, 9, a]$;
(c) $\mathbf{v}_1 = [3, 2, 5]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 4, 7]$, $\mathbf{v}_3 = [5, 6, a]$, $\mathbf{w} = [1, 3, 5]$;
(d) $\mathbf{v}_1 = [3, 2, 6]$, $\mathbf{v}_2 = [5, 1, 3]$, $\mathbf{v}_3 = [7, 3, 9]$, $\mathbf{w} = [a, 2, 5]$.
- Sprawdź czy w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ prawdziwa jest przynależność:
(a) $[4, 9, 9] \in \text{lin}([-8, -18, 18])$,
(b) $[2, 5, 3] \in \text{lin}([1, 3, 0], [0, 8, 1])$,
(c) $[3, 1, 5] \in \text{lin}([1, 4, 8], [1, 5, -5], [1, 6, 0])$.
- Sprawdź czy w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zachodzi równość $W_1 = W_2$, jeśli:
(a) $W_1 = \text{lin}([3, 1])$, $W_2 = \text{lin}([21, 7], [9, 2])$,
(b) $W_1 = \text{lin}([1, 6], [4, 1])$, $W_2 = \text{lin}([1, 2], [5, 2])$,

(c) $W_1 = \text{lin}([1, 3], [9, 6]), W_2 = \text{lin}([5, 3], [7, 6])$.

15. Sprawdź czy dane wektory rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^2$:

(a) $[1, 3], [1, 4]$, (b) $[1, 2], [7, 6]$, (c) $[1, 2], [5, 1], [9, 0]$.

16. Sprawdź czy dane wektory rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^3$:

(a) $[1, 2, 2], [5, 1, 3], [9, 0, 4]$, (b) $[2, 3, 5], [3, 4, 9], [5, 8, 17]$, (c) $[1, 2, 4], [3, 5, 9]$.

17. Sprawdź czy wektory $\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{w}$ są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli

$$\text{a) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Czy zapis wektora $\mathbf{v}$ w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?

18. Dla danych podzbiorów U , A przestrzeni liniowej V pokaż, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz $\text{lin}(A) \subset U$.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{[x_1, x_2, x_3] : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, $A = \{[1, 0, -2], [0, 1, 1], [1, -1, -3]\}$;

(b) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_2 - 2X_3 = 0 \end{cases}\right)$, $A = \{[1, 1, 2, 2], [0, 1, 2, 1], [2, 2, 1, 1]\}$.

19. Wskaż skończony zbiór A rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^3$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{[t + u, u, 2t, t - u] : t, u \in \mathbb{R}\}$;

(c) $V = \mathbb{Z}_3^3$, $U = \text{Sol}(X_1 + X_2 - X_3 = 0)$;

(d) $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}\right)$.

20. Stosując operacje elementarne wyznacz całkowicie zredukowany układ rozpinający U , gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{lin}([1, 5, 7], [2, 1, 2], [-5, 2, 1])$;

(b) $V = \mathbb{Z}_5^4$, $U = \text{lin}([4, 2, 3, 2], [2, 1, 2, 2], [1, 3, 0, 4], [2, 1, 4, 1])$.

21. Wykonując przekształcenia elementarne na zbiorze rozpinającym, wyznacz całkowicie zredukowany układ rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{lin}([1, 2, -2, 2], [0, 3, -3, 0], [-2, 5, -5, -4], [-1, 0, 0, -2], [3, -1, -1, 6])$;

(b) $V = \mathbb{Z}_7^3$, $U = \text{lin}([1, 3, 3], [2, 5, 0], [2, 1, 4], [5, 2, 0])$;

(c) $V = \mathbb{Q}^3$, $U = \text{lin}([1, 1, 1], [2, -1, 3], [0, 1, -5], [3, -2, 1], [6, -2, -1])$.

22. Sprawdź czy dane wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ są liniowo zależne:

(a) $[0, 0]$, (b) $[1, 2]$, (c) $[3, 1], [-9, 3]$, (d) $[4, 4], [1, 4]$, (e) $[0, 0], [2, 3]$, (f) $[7, -4], [-14, 8]$,
(g) $[1, 1], [1, 0], [1, 1]$.

23. Sprawdź czy dane wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:

(a) $[3, 4, 1], [4, 1, 3]$, (b) $[2, 0, 3], [10, 0, 15]$, (c) $[1, 1, 0], [4, 3, 1], [1, 4, 2]$, (d) $[4, 4, 2], [3, 1, 0], [2, 4, 1]$,
(e) $[1, 0, 1], [1, 4, 0], [1, 1, 0], [3, 2, 1]$.

24. Sprawdź czy układ $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny, gdzie:

(a) $k = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 6, 7]$;

(b) $k = 2$, $\mathbf{v}_1 = [4, -2, 6]$, $\mathbf{v}_2 = [6, -3, 9]$;

(c) $k = 3$, $\mathbf{v}_1 = [2, -3, 1]$, $\mathbf{v}_2 = [3, -1, 5]$, $\mathbf{v}_3 = [1, -4, 3]$.

25. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podane wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są liniowo zależne, jeśli:

$$\text{(a) } n = 3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{bmatrix},$$

$$\text{(b) } n = 3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(c) \quad n = 2, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ a \end{bmatrix}.$$

26. Sprawdź czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$:

$$(a) \quad [1, 0], [1, 1], \quad (b) \quad [1, 5], [-3, -15], \quad (c) \quad [3, 3], [1, 8], \quad (d) \quad [7, 3], [-7, -3].$$

27. Sprawdź czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

$$(a) \quad [1, 0, -1], [1, 1, 3], [4, 1, 1], \quad (b) \quad [1, 5, 0], [1, 2, 3], [1, 4, 1], \quad (c) \quad [1, 3, 4], [2, 7, 9], \\ (d) \quad [1, 1, 1], [1, 2, 3], [4, 7, 11], [3, 4, 7].$$

28. Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli

$$(a) \quad \mathbf{v}_1 = [1, -1], \mathbf{v}_2 = [1, 1], \quad \mathbf{w} = [1, 2],$$

$$(b) \quad \mathbf{v}_1 = [2, 1], \mathbf{v}_2 = [1, 3], \quad \mathbf{w} = [1, 1].$$

29. Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli

$$(a) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

30. Znajdź współrzędne dowolnego wektora $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ w podanej bazie przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$:

$$(a) \quad ([7, 5], [4, 3]), \quad (b) \quad ([4, 3], [17, 13]), \quad (c) \quad ([4, 5], [1, 3]).$$

31. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dana para wektorów tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$:

$$(a) \quad [1, 5], [8, a], \quad (b) \quad [2, 5], [4a, 7a]?$$

32. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ podany układ wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

$$(a) \quad ([1, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 0, a]) \quad (b) \quad ([1, 2, 1], [a, 1, 1], [2, 3, 2])?$$

33. Sprawdź czy układ wektorów $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ przestrzeni $\mathbb{K}^4$ jest liniowo zależny (niezależny), jeżeli:

$$(a) \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_7, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad K = \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli to możliwe, przedstaw jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

34. Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

35. Wyznacz bazę i wymiar podprzestrzeni $\text{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

$$(a) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\text{(c)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

36. Podany układ $\mathcal{A}$ wektorów dopełnij do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wektorami jednostkowymi. Dlaczego jest to możliwe?

(a) $n = 3$, $\mathcal{A} = ([1, 1, 2])$,

(b) $n = 4$, $\mathcal{A} = (1, 0, 1, -1], [2, 3, 1, 1])$,

(c) $n = 3$, $\mathcal{A} = ([1, 1, 0], [-1, 1, 0])$.

37. Dane są wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Pokaż, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, a układ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Sprawdź, który spośród wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ można dołączyć do wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, aby otrzymać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

(a) $\mathbf{w}_1 = [1, 1, 1]$, $\mathbf{w}_2 = [3, 4, 5]$, $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 0, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [4, 3, 1]$;

(b) $\mathbf{w}_1 = [1, 1, 3]$, $\mathbf{w}_2 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1, 5]$, $\mathbf{v}_3 = [3, 1, 7]$.

38. Wyznacz różnymi sposobami bazę i oblicz wymiar podprzestrzeni $\text{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) < (\mathbb{Z}_7)^n$, jeżeli

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\text{(b)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\text{(c)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\text{(d)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$