

1.1 Zadania

Ćwiczenie 1.1. Udowodnij, że n -simpleks σ generowany przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ jest sumą mnogościową odcinków łączących punkt a_0 z punktami $(n - 1)$ -simpleksu τ generowanego przez punkty $a_1, a_2, \dots, a_n$. Udowodnij też, że dowolne dwa takie odcinki przecinają się tylko w punkcie a_0 .

Ćwiczenie 1.2. Udowodnij, że współrzędne barycentryczne punktu x są funkcjami ciągłymi zmiennej x (w topologii sympleksu dziedziczonej z $\mathbb{R}^N$).

Ćwiczenie 1.3. Udowodnij, że n -simpleks σ generowany przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ jest zbiorem zwartym i wypukłym, który równy jest przecięciu wszystkich zbiorów wypukłych zawierających punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Ćwiczenie 1.4. Udowodnij, że dla danego n -sympleksu σ istnieje dokładnie jeden zbiór punktów geometrycznie niezależnych $a_0, a_1, \dots, a_n$ generujących σ .

Ćwiczenie 1.5. Udowodnij, że dla danego n -sympleksu σ generowanego przez $a_0, a_1, \dots, a_n$ zbiór $\text{Int } \sigma$ jest wypukły i otwarty w płaszczyźnie P generowanej przez wierzchołki σ , zaś jego domknięciem jest σ . Udowodnij też, że $\text{Int } \sigma$ jest sumą mnogościową wszystkich otwartych odcinków łączących a_0 z punktami zbioru $\text{Int } s$, gdzie s jest ścianą σ leżącą naprzeciw a_0 .

Ćwiczenie 1.6. Udowodnij, że dla danego n -sympleksu σ generowanego przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ i dla ściany s generowanej przez wierzchołki $a_0, a_1, \dots, a_p$, gdzie $p < n$, oraz ściany t generowanej przez wierzchołki $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$ (którą będziemy nazywać ścianą leżącą **naprzeciw** s):

1. σ jest sumą mnogościową odcinków łączących punkty ściany s z punktami ściany t i każde dwa takie odcinki przecinają się w co najwyżej jednym punkcie;
2. $\text{Int } \sigma$ jest sumą mnogościową otwartych odcinków łączących punkty $\text{Int } s$ z punktami $\text{Int } t$.

Ćwiczenie 1.7. Zbiór $U \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy **gwiazdźściem wypukłym** względem punktu 0, jeżeli dla każdego punktu $x \in U$ odcinek łączący 0 z punktem x jest zawarty w U . Udowodnij, że jeżeli U jest zbiorem gwiazdźściem wypukłym względem 0, to promień wychodzący z 0 może przeciąć $\text{Bd } U$ w więcej niż jednym punkcie oraz że $\bar{U}$ nie musi być homeomorficzne z B^N .