

Podstawowe pojęcia, przykłady i twierdzenia dotyczące grup, pierścieni i ciał.

- (1) Ile wspólnych wyrazów mają stuwyrzowe ciągi arytmetyczne $5, 8, 11, 14, \dots$ oraz $3, 7, 11, 15, \dots$?
- (2) Niech m będzie liczbą naturalną. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ wraz z dodawaniem modulo m (tzn. $a \oplus b = (a+b)_m$) jest grupą abelową. Zbuduj tabelki działań w grupach $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$.
- (3) Niech m będzie liczbą naturalną. Wykaż, że zbiór $U(\mathbb{Z}_m) = \{k \in \mathbb{Z}_m : \text{NWD}(k, m) = 1\}$ wraz z mnożeniem modulo m (tzn. $a \odot b = (ab)_m$) jest grupą abelową. Zbuduj tabelki działań w grupach $U(\mathbb{Z}_5), U(\mathbb{Z}_6), U(\mathbb{Z}_8)$.
- (4) Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}_m$ z działaniami modulo m jest ciałem, gdy $m = 5, m = 6, m = 7, m = 8$.
- (5) Wyznacz odwrotności niezerowych elementów ciał $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$.
- (6) Rozwiąż układy równań a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 4 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$.
w ciałach $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$.
- (7) Wyznacz, jeśli istnieją, pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.
- (8) Wyznacz pierwiastki równań:
a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$, b) $2x^2 + 2x + 2 = 0$, c) $2x^3 + 3x^2 + x = 0$,
w ciałach $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$,
- (9) Dla jakich wartości parametru m równanie:
a) $mx^2 + 2mx + (m+1) = 0$, b) $3x^2 + 5x + m = 0$, c) $3x^2 + mx + (m^2 - m) = 0$
ma 2 różne pierwiastki w ciele $\mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$?