Rozdział IV

RELACJE. RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

Relacją n-członową nazywamy zbiór, którego wszystkie elementy są n-kami uporządkowanymi. Innymi słowy relacją n-członową nazywamy taki zbiór R, dla którego istnieją zbiory $A_1, \ldots, A_n$ takie, że $R \subset A_1 \times \ldots \times A_n$.

Mając daną relację $R \subset A_1 \times \ldots \times A_n$, *i-tą dziedziną* R nazywamy zbiór

$$D_i(R) = \{x \in A_i : \bigvee_{a_1} \ldots \bigvee_{a_{i-1}} \bigvee_{a_{i+1}} \ldots \bigvee_{a_n} \langle a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n \rangle \in R.$$

W szczególności jeżeli R jest relacją dwuczłonową, to pierwszą dziedzinę $D_1(R)$ nazywamy po prostu *dziedziną* R i oznaczamy przez $D(R)$, a drugą dziedzinę $D_2(R)$ nazywamy *przeciwdziedziną* relacji R i oznaczamy przez $D^*(R)$.

Tak więc, dla $R \subset A \times B$ mamy

$$D(R) = \{x \in A : \bigvee_{y \in B} \langle x, y \rangle \in R\}, \qquad D^*(R) = \{y \in B : \bigvee_{x \in A} \langle x, y \rangle \in R\}.$$

Zbiór $D(R) \cup D^*(R)$ nazywamy *polem relacji* R.

Zamiast pisać $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R$ piszemy często $R(x_1, \ldots, x_n)$, a w przypadku gdy R jest relacją dwuczłonową piszemy $x_1 R x_2$.

Rozważmy teraz relacje $R \subset X^2$ ($X^2 = X \times X$). Spośród nich wyróżnimy pewne specjalne rodzaje relacji, a mianowicie:

a) *zwrotne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \langle x, x \rangle \in R$$

($\bigwedge_{x \in X} xRx$, $\bigwedge_{x \in X} R(x, x)$),

b) *przeciwzwrotne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \langle x, x \rangle \notin R$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} \sim xRx$, $\bigwedge_{x \in X} \sim R(x, x)$),

c) *symetryczne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} xRy \Rightarrow yRx$, $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$),

d) *słabo antysymetryczne* w X (*wpół antysymetryczne, na wpół przeciwsymetryczne*), tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$, $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$),

e) *przeciwsymetryczne* w X (*asymetryczne*), tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} (\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} xRy \Rightarrow \sim yRx$, $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} R(x, y) \Rightarrow \sim R(y, x)$),

f) *przechodnie* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \bigwedge_{z \in X} \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \bigwedge_{z \in X} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$, $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \bigwedge_{z \in X} R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$),

g) *spójne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} \langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R \vee x = y$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} xRy \vee yRx \vee x = y$, $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in X} R(x, y) \vee R(y, x) \vee x = y$).

Przez I_X oznaczamy następującą relację:

$$\{\langle x, y \rangle \in X^2 : x = y\} = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$$

i nazywamy ją *identycznością* na zbiorze X.

Jeśli $R \subset X^2$ i $X_1 \subset X$, to relację $R \cap X_1^2$ nazywamy *obcięciem* R do X_1 i oznaczamy przez $R \upharpoonright X_1$.

O relacji $R \subset X^2$ mówimy, że jest zwrotna (przeciwzwrotna, symetryczna itp.) jeśli $R \upharpoonright X_1$ jest zwrotna (przeciwzwrotna, symetryczna itp.) na X_1 będącym polem R.

Relację $R \subset X^2$ zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy *relacją równoważności.*

Relację $R \subset X^2$ zwrotną, słabo antysymetryczną i przechodnią nazywamy *relacją porządku.*

Znaleźć dziedziny następujących relacji R (zad. 4.1-4.6):

4.1. $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$.

4.2. $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$.

4.3. $R = \{\langle a, b, c\rangle, \langle a, c, b\rangle, \langle a, d, b\rangle\}$.

4.4. $R(a, b) \Leftrightarrow (a \in \mathcal{N} \wedge b \in \mathcal{N} \wedge a < b)$.

4.5. $R(a, b, c) \Leftrightarrow (a \in \mathcal{Z} \wedge b \in \mathcal{Z} \wedge c \in \mathcal{N} \wedge a^2+b^2 < 10-c^2)$.

4.6. $R(a, b, c) \Leftrightarrow \left(a \in \mathcal{R} \wedge b \in \mathcal{R} \wedge c \in \mathcal{N} \wedge \bigvee_{\{x \in \mathcal{R}-\{0\}} \frac{a \cdot b}{x} = c+1\right)$.

4.7. Dowieść, że jeśli dla pewnego i mamy $D_i(R) = O$, to $R = O$.

Zakładając, że różne litery oznaczają różne elementy, zbadać, które spośród własności a-h mają następujące relacje $R \subset X^2$, gdzie $X = \{a,b,c,d\}$. Jeśli R nie ma którejś z wymienionych własności, zbadać, czy istnieje takie niepuste $X_1 \subset X$, że $R \upharpoonright X_1$ własność tę w X_1 już posiada (zad. 4.8-4.11):

4.8. $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$.

4.9. $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$.

4.10. $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle a, d\rangle\}$.

4.11. $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.

4.12. Udowodnić, że dla dowolnej relacji R, $R \subset D(R) \times D^*(R)$.

4.13. Udowodnić, że część wspólna dwu relacji zwrotnych w zbiorze X jest zwrotna w zbiorze X.

4.14. Udowodnić, że na to, by relacja R była zwrotna, potrzeba i wystarcza, by $I_{D(R) \cup D^*(R)} \subset R$.

4.15. Udowodnić, że na to, by relacja R była przeciwzwrotna, potrzeba i wystarcza, by $I_{D(R) \cup D^*(R)} \cap R = O$.

4.16. Udowodnić, że część wspólna oraz suma dowolnej rodziny relacji przeciwzrotnych jest przeciwzwrotna.

4.17. Czy suma dowolnej rodziny relacji zwrotnych jest zwrotna?

4.18. Udowodnić, że jeśli relacja R jest słabo antysymetryczna w zbiorze X, to $R - I_X$ jest asymetryczna w zbiorze X. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

4.19. Udowodnić, że jeżeli relacja R jest asymetryczna w zbiorze X, to $R \cup I_X$ jest słabo antysymetryczna w zbiorze X. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

4.20. Dowieść, że jeżeli $R \subset X^2$ ma jedną z własności a-g, to $R \restriction D(R) \cup D^*(R)$ też ma tę własność.

4.21. Udowodnić, że jeżeli R jest relacją asymetryczną, to jest relacją przeciwzwrotną.

4.22. Udowodnić, że jeśli $R \subset X^2$ jest relacją spójną w X, to $D(R) - D^*(R)$ i $D^*(R) - D(R)$ są co najwyżej jednoelementowe.

Jeśli $R_1 \subset X^2$, to $R_2 \subset X^2$ takie, że $R_1 \subset R_2$ nazywamy *rozszerzeniem relacji* R_1.

Zbadać, czy każdą relację $R \subset X^2$ można rozszerzyć do relacji (zad. 4.23-4.29):

4.23. Zwrotnej w X^2.

4.24. Przeciwzwrotnej w X^2.

4.25. Symetrycznej w X^2.

4.26. Przeciwsymetrycznej w X^2.

4.27. Słabo antysymetrycznej w X^2.

4.28. Przechodniej w X^2.

4.29. Spójnej w X^2.

Dla danej relacji R definiujemy

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}.$$

4.30. Udowodnić, że na to, by relacja R była symetryczna, potrzeba i wystarcza, by $R \subset R^{-1}$.

4.31. Udowodnić, że $R \subset R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$.

4.32. Sprawdzić, czy prawdziwe są wzory:

a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$, b) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$,

c) $I_X^{-1} = I_X$, d) $(X^2)^{-1} = X^2$.

4.33. Udowodnić, że na to, by relacja R była spójna w zbiorze X, potrzeba i wystarcza, by $R \cup R^{-1} \cup I_X = X^2$.

Sprawdzić, czy następujące zdania są prawdziwe (zad. 4.34-4.38):

4.34. Suma dwu relacji symetrycznych na zbiorze X jest symetryczna na tym zbiorze.

4.35. Część wspólna dwu relacji przechodnich na zbiorze X jest przechodnia na tym zbiorze.

4.36. Część wspólna dwu relacji spójnych na zbiorze X jest spójna na tym zbiorze.

4.37. Suma dwu relacji spójnych na zbiorze X jest spójna na tym zbiorze.

4.38. Jeżeli R jest relacją przechodnią w X oraz $R \subset S \subset X^2$, to S jest relacją przechodnią w X.

Iloczynem względnym relacji R i S (oznaczanym dalej przez $R \circ S$) nazywamy relację $T \subset D(R) \times D^*(S)$ taką, że

$$\langle x, z\rangle \in T \Leftrightarrow \bigvee_{y} (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S).$$

4.39. Udowodnić, że na to, by relacja R była przechodnia, potrzeba i wystarcza, by $R \circ R \subset R$.

4.40. Udowodnić, że $I_X \circ I_Y = I_{X \cap Y}$.

4.41. Udowodnić, że $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

4.42. Udowodnić, że $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

4.43. Udowodnić, że $I_{D(R)} \subset R \circ R^{-1}$, $I_{D^*(R)} \subset R^{-1} \circ R$.

4.44. W zadaniu tym zajmujemy się relacjami w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathscr{R}$, tj. podzbiorami $\mathscr{R}^2$.

a) Jaka jest naturalna interpretacja geometryczna takich relacji?
b) Jaki jest sens geometryczny zbiorów $D(R)$ i $D^*(R)$?
c) Jaki jest sens geometryczny własności zwrotności?
d) Jaki jest sens geometryczny własności symetrii?
e) Jaki jest sens geometryczny spójności?
f) Jaki jest sens geometryczny przeciwzwrotności?
g) Jaki jest sens geometryczny asymetrii?
h) Jaki jest sens geometryczny słabej antysymetrii?

Zbadać, które spośród własności a-g ze str. 37-38 ma relacja R (4.45-4.81):

4.45. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow 3|x-y$.

4.46. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow 2|x+y$.

4.47. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x|y$.

4.48. $R \subset (\mathscr{N} - \{0\})^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N} - \{0\}} xRy \Leftrightarrow (x|y \wedge x \neq y)$.

4.49. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 3)$.

4.50. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 1).$

4.51. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2.$

4.52. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^2 \neq y^2.$

4.53. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3.$

4.54. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^3 = y^2.$

4.55. $R \subset \mathscr{C}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{C}} xRy \Leftrightarrow |x| < |y|.$

4.56. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow |x|+|y| = 3.$

4.57. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow |x|+|y| \neq 3.$

4.58. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow |x|+|y| \neq 4.$

4.59. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow (x \leqslant 5 \wedge y \leqslant 5 \wedge x = y) \vee (x > 5 \wedge y > 5 \wedge 2|x+y).$

4.60. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow (x > y \vee y > x).$

4.61. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathscr{W}.$

4.62. $R \subset \mathscr{W}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{W}} xRy \Leftrightarrow x-y \notin \mathfrak{z}.$

4.63. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x-y \notin \mathscr{N}.$

4.64. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow e^x = 2e^y.$

4.65. $R \subset \mathscr{C}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{C}} xRy \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Im} y.$

4.66. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow (3x = 2y).$

4.67. $R \subset \mathscr{W}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{W}} xRy \Leftrightarrow y = x+2.$

4.68. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow |x-2| = |y+2|.$

4.69. $R \subset \mathscr{C}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{C}} xRy \Leftrightarrow \bigvee_{a,b \in \mathscr{N}} x-y = a+bi.$

4.70. $R \subset (\mathscr{W}^2)^2 \wedge \bigwedge_{x,y,z,t \in \mathscr{W}} \langle x, y\rangle R \langle z, t\rangle \Leftrightarrow xt = yz.$

4.71. $R \subset (\mathscr{N}^3)^2 \wedge \bigwedge_{x,y,z,t,u,w \in \mathscr{N}} \langle x, y, z\rangle R \langle t, u, w\rangle \Leftrightarrow (x = t \wedge y = w \wedge z = u).$

4.72. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow x \cdot y = 4.$

*4.73. $R \subset (\mathscr{P}(\mathscr{N}))^2 \wedge \bigwedge_{X,Y \in \mathscr{P}(\mathscr{N})} XRY \Leftrightarrow X \dot{-} Y$ jest zbiorem skończonym.

4.74. Niech Par oznacza podzbiór zbioru liczb naturalnych złożony z liczb parzystych,

$$R \subset (\mathscr{P}(\mathscr{N}))^2 \wedge \bigwedge_{X,Y \in \mathscr{P}(\mathscr{N})} XRY \Leftrightarrow X \cap \mathrm{Par} = Y \cap \mathrm{Par}.$$

4.75. $R \subset (\mathscr{P}(\mathscr{N}))^2 \wedge \bigwedge_{X,Y \in \mathscr{P}(\mathscr{N})} XRY \Leftrightarrow X \cap Y \subset \mathscr{N} - \mathrm{Par}.$

4.76. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Rodzina $I \subset \mathscr{P}(X)$ nazywa się *ideałem* wtedy i tylko wtedy, gdy

1° $O \in I$,

2° $Z \in I \wedge Y \in I \Leftrightarrow Z \cup Y \in I$.

Dla danego ideału $I \subset \mathscr{P}(X)$ definiujemy relację R w zbiorze $\mathscr{P}(X)$ wzorem

$$ZRY \Leftrightarrow Z \dot{-} Y \in I.$$

4.77. Niech T będzie zbiorem wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych, $\{x_n\} R \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \{x_n\} > \lim_{n\to\infty} \{y_n\}$.

4.78. Przy warunku z zadania poprzedniego,

$$\{x_n\} R \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 7.$$

4.79. Przy warunku z zadania 4.77,

$$\{x_n\} R \{y_n\} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} y_n.$$

4.80. Dla danego zbioru X rozważmy rodzinę wszystkich relacji w zbiorze X i relację R określoną na elementach tej rodziny następująco:

$$ARB \Leftrightarrow D(A) \subset D(B).$$

4.81. Dane są zbiory X i Y oraz ideał I (por. zadanie 4.76) w zbiorze taki, że $X \in I$. W zbiorze ${}^XY$ wszystkich funkcji o dziedzinie X i wartościach w Y, określamy relację R wzorem

$$fRg \Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in I.$$

Podziałem zbioru X nazywamy rodzinę $\{X_i : i \in I\}$ niepustych podzbiorów zbioru X spełniających następujące warunki:

a) $\bigwedge_{i,j \in I} (i \neq j \Leftrightarrow X_i \cap X_j = O)$, b) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$.

Każda relacja równoważności $R \subset X^2$ wyznacza podział zbioru X na tzw. klasy abstrakcji; *klasą abstrakcji* elementu x, $[x]_R$ nazywamy zbiór $\{y : yRx\}$.

4.82. Udowodnić, że jeśli R jest relacją równoważności, to

a) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow xRy$, b) $[x]_R \cap [y]_R \neq O \Leftrightarrow xRy$.

4.83. Udowodnić, że każdy podział $\mathscr{X} = \{X_i : i \in I\}$ zbioru X wyznacza relację równoważności $R_{\mathscr{X}}$ w zbiorze X w myśl wzoru

$$xR_{\mathscr{X}}y \Leftrightarrow \bigvee_i (x \in X_i \wedge y \in X_i).$$

4.84. Udowodnić, że jeśli rodzina $\mathscr{X}$ nie spełnia warunku b, to $R_{\mathscr{X}}$ nie jest relacją równoważności.

4.85. Udowodnić, że warunek a nie jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by relacja $R_{\mathscr{X}}$ określona za pomocą rodziny $\mathscr{X}$ spełniającej warunek b była relacją równoważności. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by R była relacją równoważności.

Jeśli relacja R wyznacza podział $\mathscr{X}$ zbioru X, zaś podział $\mathscr{X}$ wyznacza relację R_1, to $R = R_1$. Podobnie, podział $\mathscr{X}$ wyznaczony przez relację $R_{\mathscr{X}}$ równy jest $\mathscr{X}$.

Dla danego zbioru X oraz relacji $R \subset X^2$ zbadać, czy R jest relacją równoważności, jeśli tak wskazać klasy abstrakcji (zad. 4.86-4.123).

4.86. $X = \mathrm{Par}$, $xRy \Leftrightarrow 3|x-y$.

4.87. $X = \mathscr{C}$, $z_1Rz_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$.

4.88. $X = \mathscr{R}$, $xRy \Leftrightarrow x-y = 2$.

4.89. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow 2|x+y$.

4.90. $X = \mathscr{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$.

4.91. $X = \{1, 2, 3\}$, $xRy \Leftrightarrow x+y \neq 3$.

4.92. $X = \mathscr{R}[t]$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee\limits_{a,b,c} (x-y = at^2+bt+c)$.

4.93. $X = \mathscr{Z}[t]$, $xRy \Leftrightarrow$ różnica wielomianów x i y ma wszystkie współczynniki parzyste.

4.94. $X = \mathscr{C}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee\limits_{z \in \mathscr{R}} (z \neq 0 \wedge xz = y)$.

4.95. $X = \mathscr{R}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee\limits_{a \in \mathscr{R}} (x+yi)^2 = ai$.

4.96. $X = \mathscr{C}_\infty [a, b]$, $fRg \Leftrightarrow \bigvee\limits_{k,n \in \mathscr{N}} (f^{(n)} = g^{(k)})$, gdzie $f^{(n)}$ oznacza n-tą pochodną funkcji f.

4.97. $X = \mathscr{W}[t]$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee\limits_{a,b \in \mathscr{W}} (x-y = at+b)$.

4.98. $X = \mathscr{C}$, $xRy \Leftrightarrow x+y \in \mathscr{R}$.

4.99. $X = \{1, 2, \ldots, 16\}$, $xRy \Leftrightarrow 4|x^2-y^2$.

4.100. X = zbiór wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych,

$$\{x_n\}_{n\in\mathscr{N}} R \{y_n\}_{n\in\mathscr{N}} \Leftrightarrow \lim x_n = \lim y_n.$$

4.101. Zbiór X jak w zadaniu 4.100, $\{x_n\}_{n\in\mathscr{N}} R \{y_n\}_{n\in\mathscr{N}} \Leftrightarrow \{x_n-y_n\}_{n\in\mathscr{N}}$ jest zbieżny do zera.

4.102. $X = \mathscr{N}$, k ustalona liczba naturalna większa od 2, $xRy \Leftrightarrow k|x+y$.

4.103. X i k jak w zadaniu 4.102, $xRy \Leftrightarrow k|x-y$.

4.104. X = zbiór macierzy 2×2 o wyrazach rzeczywistych, Det A — wyznacznik macierzy A, $ARB \Leftrightarrow \operatorname{Det} A = \operatorname{Det} B$.

4.105. X = zbiór macierzy 2×2 o wyrazach rzeczywistych, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $ARB \Leftrightarrow \bigvee_{k\in\mathscr{R}} A-B = kI$.

4.106. $X = \mathscr{C}[t]$, $fRg \Leftrightarrow f-g \in \mathscr{R}[t]$.

4.107. $X = \mathscr{R}[t]$, $fRg \Leftrightarrow f-g$ jest wielomianem stopnia nieparzystego.

4.108. $X = \mathscr{R}[t]$ $fRg \Leftrightarrow f-g$ jest wielomianem stopnia parzystego.

4.109. $X = \mathscr{N}-\{0\}$, $xRy \Leftrightarrow x\cdot y$ jest liczbą nieparzystą.

4.110. $X = \mathscr{N}-\{0\}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{t\in\mathscr{N}} xy = t^2$.

4.111. $X = \mathscr{N}\times(\mathscr{N}-\{0\})$, $\langle r, s\rangle R \langle t, u\rangle \Leftrightarrow ru = st$.

4.112. $X = \mathscr{N}\times\mathscr{N}$, $\langle r, s\rangle R \langle t, u\rangle \Leftrightarrow r+u = s+t$.

4.113. $X = Z\times(Z-\{0\})$, $\langle r, s\rangle R \langle t, u\rangle \Rightarrow ru = st$.

4.114. $X = \mathscr{R}$, $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathscr{N}$.

4.115. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow (x\in \mathrm{Par} \wedge y \in \mathrm{Par} \wedge x = y) \vee$

$$\vee (x \notin \mathrm{Par} \wedge y \notin \mathrm{Par} \wedge 3|x-y).$$

4.116. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow (x\in \mathrm{Par} \wedge y \in \mathrm{Par} \wedge 3|x-y) \vee$

$$\vee (x \notin \mathrm{Par} \wedge y \notin \mathrm{Par} \wedge 5|x-y).$$

4.117. $X = \mathscr{P}(Y)$ (Y jest ustalonym zbiorem co najmniej dwu elementowym), $ARB \Leftrightarrow A \subset B \vee B \subset A$.

4.118. $X = \mathscr{P}(Y)$, a ustalony element zbioru Y, $ARB \Leftrightarrow a \in (A \cup B)$.

4.119. $X = \mathscr{Z}$, $xRy \Leftrightarrow (|x| < 5 \wedge |y| < 5 \wedge x = y) \vee$ $\vee(|x| \geqslant 5 \wedge |y| \geqslant 5 \wedge 2|x-y)$.

4.120. $X = \mathscr{P}(Y)$, C ustalony podzbiór zbioru Y, $ARB \Leftrightarrow A \dot{-} B \subset C$.

4.121. $X = \mathscr{R}[t]-\{0\}$, $xRy \Leftrightarrow xy$ jest wielomianem stopnia parzystego.

4.122. $X = \mathscr{W}[t]$, $fRg \Leftrightarrow fg$ jest wielomianem stopnia nieparzystego.

4.123. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{k,l \in \mathscr{N}} (k > 0 \wedge l > 0 \wedge x^k = y^l)$.

***4.124.** Dane zbiory X_1, X_2 oraz relacje równoważności $R_1 \subset X_1^2$ i $R_2 \subset X_2^2$. W zbiorze $X_1 \times X_2$ definiujemy relacje S wzorem

$$\langle x_1, x_2 \rangle S \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow [(x_1 R_1 y_1) \wedge (x_2 R_2 y_2)].$$

Czy S jest relacją równoważności, jeśli tak wskazać jej klasy abstrakcji.

4.125. Dane są relacje równoważności $R_1, R_2 \subset X^2$, Zbadać, czy

a) relacja $R_1 \cap R_2$ jest relacją równoważności,

b) relacja $R_1 \cup R_2$ jest relacją równoważności,

c) relacja $\sim R_1 = X^2 - R_1$ jest relacją równoważności.

Jeśli tak, uzależnić podział wyznaczony przez zdefiniowaną relację od podziałów wyznaczonych przez relacje R_1 i R_2.

4.126. Dana jest rodzina $\{R_t\}_{t \in T}$ relacji równoważności. Zbadać, czy:

a) $\bigcap_{t \in T} R_t$ jest relacją równoważności,

b) $\bigcup_{t \in T} R_t$ jest relacją równoważności.

Jeśli nie, podać odpowiedni kontrprzykład.

4.127. Dane jest przekształcenie $f: X \to Y$. Definiujemy w zbiorze X relację $\sim_f$, wzorem

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

a) Udowodnić, że $\sim_f$ jest relacją równoważności,

b) znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by relacja $\sim_f$ była identycznością.

4.128. Dany jest podział zbioru $\mathscr{R}$ na odcinki domknięto-otwarte $\{\langle x, x+1) : x \in \mathscr{Z}\}$. Wskazać relację równoważności, której klasami abstrakcji są dokładnie zbiory tego podziału.

4.129. Dany jest podział zbioru $\mathscr{Z}$ na dwa zbiory: zbiór liczb parzystych i zbiór liczb nieparzystych. Wskazać relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

4.130. Dzielimy płaszczyznę $\mathscr{R}^2$ na pięć zbiorów, odpowiadających czterem ćwiartkom otwartym płaszczyzny oraz sumie mnogościowej osi Ox i Oy. Znaleźć relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

4.131. Płaszczyznę $\mathscr{R}^2$ dzielimy na zbiory będące okręgami o środku w początku układu współrzędnych. Znaleźć relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

4.132. Dane są podziały $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t \in T}$, $\mathscr{B} = \{B_s\}_{s \in S}$ zbioru X. Zakładamy ponadto, że

$$\bigwedge_{t \in T} \bigvee_{s \in S} A_t \subset B_s.$$

Podać, jaki jest związek pomiędzy relacjami równoważności odpowiadającymi tym podziałom.

4.133. Na zbiorze X dane są relacje równoważności R_1 i R_2 takie, że $R_1 \subset R_2$, tj.

$$\bigwedge_{x,y} \langle x, y \rangle \in R_1 \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_2.$$

Jaki jest związek pomiędzy podziałami zbioru A wyznaczonymi przez te relacje?

Istnieje wygodny i poglądowy sposób przedstawiania relacji dwuargumentowych za pomocą tzw. *diagramów*. Tworzy się je w sposób następujący. Niech $R \subset A \times B$ i niech A i B będą zbiorami skończonymi. Elementy zbiorów A i B przedstawiamy w postaci punktów na płaszczyźnie przyjmując np., że punkt oznaczony kropką $(\cdot)$ odpowiada elementowi zbioru A, punkt oznaczony krzyżykiem $(+)$ — elementowi zbioru B. W szczególności jeśli $A = B$, to wszystkie punkty oznaczamy kropkami. Jeśli relacja R zachodzi między elementami $a \in A$ i $b \in B$, tj. aRb, to rysujemy strzałkę o początku w punkcie odpowiadającym elementowi a i końcu w punkcie odpowiadającym elementowi b.

Własności relacji R mogą być łatwo odczytane z diagramu.

4.134. Narysować diagram relacji $R \subset A^2$, gdzie $A = \{0, 1, 2\}$, określonej następująco: $xRy \Leftrightarrow x < y$.

4.135. Narysować diagram relacji $R \subset A^2$, gdzie $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, takiej, że $xRy \Leftrightarrow x|y \wedge x \neq y$.

4.136. Narysować diagram relacji $R \subset A^2$, gdzie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, takiej, że $xRy \Leftrightarrow 2|x+y$.

Podać jaką własność ma diagram relacji (zad. 4.137-4.143):

4.137. Zwrotnej.
4.138. Przechodniej.
4.139. Słabo antysymetrycznej.
4.140. Symetrycznej.
4.141. Spójnej.
4.142. Przeciwzwrotnej.
4.143. Asymetrycznej.

Jeśli $R \subset A^2$ jest relacją zwrotną i przechodnią, wówczas możemy diagram uprościć opuszczając wszystkie strzałki wychodzące z danego punktu i wracające od razu do niego.

Mając także narysowane strzałki prowadzące od a do b i od b do c możemy opuścić strzałkę prowadzącą od a do c itd.

Zachodzenie relacji xRy jest odczytywane wówczas z diagramu jako możność przejścia od punktu x do punktu y idąc zgodnie z kierunkiem strzałek.

W zadaniach 4.144-4.150 mowa będzie wyłącznie o takich uproszczonych diagramach relacji zwrotnych i przechodnich.

Podać jaką własność ma (zad. 4.144-4.150):

4.144. Diagram relacji symetrycznej.

4.145. Diagram relacji słabo antysymetrycznej.

4.146. Diagram relacji słabo antysymetrycznej i spójnej.

4.147. Punkt diagramu odpowiadający elementowi minimalnemu relacji porządku.

4.148. Punkt diagramu odpowiadający elementowi maksymalnemu relacji porządku.

4.149. Punkt diagramu odpowiadający elementowi najmniejszemu relacji porządku.

4.150. Punkt diagramu odpowiadający największemu elementowi.