Dodatek II

KRATY I ALGEBRY BOOLE'A

System relacyjny $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy *kratą* (ang. *lattice*), jeśli działania $\wedge$, $\vee$ są działaniami dwuargumentowymi o następujących własnościach:

L1 a) $a \wedge a = a$, b) $a \vee a = a$.

L2 a) $a \wedge b = b \wedge a$, b) $a \vee b = b \vee a$.

L3 a) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, b) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

L4 a) $a \wedge (a \vee b) = a$, b) $a \vee (a \wedge b) = a$.

Jeśli działania $\wedge$ i $\vee$ mają dodatkowo własności:

L5 a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,

b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

to kratę nazywamy *rozdzielną*.

Krata bywa też nazywana *strukturą*.

D2.1. Udowodnić, że w dowolnej kracie

$$(a = a \vee b) \Leftrightarrow (a \wedge b = b).$$

D2.2. Wprowadzamy relację dwuargumentową $\leqslant$ wzorem $a \leqslant b \Leftrightarrow a \vee b = b$. Udowodnić, że relacja $\leqslant$ jest częściowym porządkiem.

D2.3. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ będzie kratą, zaś $\leqslant$ częściowym porządkiem określonym w zadaniu D2.2. Udowodnić, że system relacyjny $\langle L, \leqslant \rangle$ jest zbiorem skierowanym, innymi słowy, że spełnia on warunek $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{c} (a \leqslant c \wedge b \leqslant c)$.

D2.4. Rozważmy podobnie jak w zadaniu D2.3 system relacyjny $\langle L, \leqslant \rangle$. Udowodnić, że w zbiorze L każde dwa elementy mają kres dolny i górny, to znaczy, że

a) $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{c} \bigwedge_{d} [(d \leqslant a \wedge d \leqslant b) \Leftrightarrow d \leqslant c]$,

b) $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{c} \bigwedge_{d} [(a \leqslant d \wedge b \leqslant d) \Leftrightarrow c \leqslant d]$.

D2.5. Udowodnić, że w dowolnej kracie:

a) $a \wedge b \leqslant a$,

b) $(a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a \wedge c \leqslant b \wedge d)$,

c) $a \leqslant a \vee b$,

d) $(a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a \vee c \leqslant b \vee d)$.

D2.6. Rozważmy system relacyjny $\langle \mathcal{N} - \{0\}, \wedge, \vee \rangle$, gdzie $x \wedge y = \mathrm{NWD}(x, y)$, zaś $x \vee y = \mathrm{NWW}(x, y)$. Udowodnić, że system ten jest kratą. Czy krata ta jest rozdzielna?

D2.7. Udowodnić, że jeśli $\langle X, \leqslant \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, to można w nim wprowadzić działania $\wedge$ oraz $\vee$ w ten sposób, że $\langle X, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą, a porządek (por. zadanie D2.2) wyznaczony przez te działania jest identyczny z $\leqslant$.

D2.8. Jeśli $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą, to *kresem dolnym zbioru* $X \subset L$ nazywamy $t \in L$, spełniające warunek

$$\bigwedge_x \bigwedge_y [(y \in X \Rightarrow x \leqslant y) \Leftrightarrow x \leqslant t].$$

Udowodnić, że dla każdego skończonego podzbioru zbioru L istnieje kres dolny.

D2.9. Sformułować (analogicznie do zadania D2.8) pojęcie *kresu górnego*. Udowodnić analogiczne twierdzenie.

D2.10. Znaleźć kratę $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ oraz zbiór $X \subset L$ taki, że X nie posiada kresu dolnego. Czy można znaleźć przykład, w którym zbiór L byłby skończony?

D2.11. Niech $\bigcap X, \bigcup X$ oznaczają odpowiednio kres górny i dolny zbioru $X \subset L$ (o ile istnieją). Niech X i Y będą skończonymi podzbiorami zbioru L. Udowodnić, że:

a) $\bigcap X \wedge \bigcap Y = \bigcap (X \cup Y)$, b) $\bigcup X \vee \bigcup Y = \bigcup (X \cup Y)$.

D2.12. W zbiorze $\mathscr{P}(\mathcal{N})$ wprowadzamy relację $\sim$ wzorem $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(X - Y) \cup (Y - X)$ jest zbiorem skończonym. Jest to relacja równoważności, w zbiorze jej klas abstrakcji wprowadzamy relację $\leqslant$ wzorem $[A] \leqslant [B] \Leftrightarrow A - B$ jest zbiorem skończonym. Udowodnić, że w zbiorze $\mathcal{N}/_{\sim}$ można wprowadzić działania $\wedge$ i $\vee$ tak, że otrzymamy kratę, a częściowy porządek wyznaczony przez działania $\wedge$ i $\vee$ jest identyczny z $\leqslant$. Udowodnić, że definicja relacji $\leqslant$ jest poprawna, to znaczy, że nie zależy od wyboru reprezentantów.

D2.13. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ będzie kratą. W zbiorze L określamy działania $\wedge'$ i $\vee'$ wzorami $a \wedge' b = a \vee b$, $a \vee' b = a \wedge b$. Udowodnić, że $\mathfrak{L}' = \langle L, \wedge', \vee' \rangle\rangle$ jest kratą.

D2.14. Niech $\langle X, D \rangle$ będzie przestrzenią topologiczną, D — rodziną domkniętych podzbiorów X. W zbiorze D określamy działania $\wedge$ i $\vee$ wzorami $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = A \cup B$. Udowodnić, że system relacyjny $\langle D, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą rozdzielną.

D2.15. Krata $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywa się kratą modularną, jeśli spełniony jest w niej warunek: L 4 1/2 $a \leqslant c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Udowodnić, że każda liczba rozdzielna jest modularna.

D2.16. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by krata była modularna jest, by nie zawierała podkraty pięcioelementowej $\langle \{a, b, c, d, e\}, \wedge, \vee \rangle$, w której porządek $\leqslant$ posiada diagram (rys. 45, str. 253).

D2.17. Wskazać przykłady kraty rozdzielnej, kraty nierozdzielnej. Jaka własność aksjomatu L5 jest w ten sposób udowodniona?

D2.18. Wskazać przykłady:

a) kraty niemodularnej,

b) kraty modularnej ale nierozdzielnej.

D2.19. W zbiorze $\mathscr{P}(X^2)$, tj. wszystkich relacji w zbiorze X relacja $\subset$ jest częściowym porządkiem. Udowodnić, że w zbiorze tym można tak określić działania $\wedge$ i $\vee$, by wyznaczona przez nie relacja $\leqslant$ była identyczna z $\subset$.

D2.20. W zbiorze T wszystkich relacji równoważności o polu X relację $\subset$ wyznacza częściowy porządek. Udowodnić, że można tak określić działania $\wedge$ i $\vee$ w zbiorze T, by wyznaczony przez nie porządek $\leqslant$ był identyczny z $\subset$.

D2.21. Udowodnić, że układ aksjomatów L1-L5 jest zbyt obszerny, na przykład:

a) L1 jest zależne od pozostałych,

b) L5 a i L1 b jest zależne od pozostałych,

c) L5 b jest zależne od pozostałych.

D2.22. Załóżmy, że $O \neq X \subset L$ ma oba kresy. Udowodnić, że

a) $\bigcap X \leqslant x$ dla $x \in X$,

b) $x \leqslant \bigcup X$ dla $x \in X$,

c) $\bigcap X \leqslant \bigcup X$.

D2.23. Udowodnić, że jeżeli niepusty zbiór $X \subset L$ ma kres górny, to zbiór elementów w postaci $a \vee x$ (gdzie a jest ustalonym elementem, $x \in X$) też ma kres górny i zachodzi równość

$$a \vee \bigcup X = \bigcup \{a \vee x : x \in X\}.$$

D2.24. Przy analogicznych założeniach jak w zadaniu D2.22 udowodnić, że

$$a \wedge \bigcap X = \bigcap \{a \wedge x : x \in X\}.$$

D2.25. Niech $\{a_t : t \in T\}$, $\{b_t : t \in T\}$ będą rodzinami elementów zbioru L. Niech $\bigwedge_{t \in T} a_t \leqslant b_t$ i niech istnieją kresy dolne i górne obu zbiorów, wtedy

a) $\bigcap_{t \in T} a_t \leqslant \bigcap_{t \in T} b_t$, b) $\bigcup_{t \in T} a_t \leqslant \bigcup_{t \in T} b_t$,

gdzie $\bigcap_{t \in T} a_t = \bigcap \{a_t : t \in T\}$, zaś $\bigcup_{t \in T} a_t = \bigcup \{a_t : t \in T\}$.

D2.26. Przy założeniach zadania D2.25 udowodnić, że jeżeli rodziny $\{a_t \vee b_t : t \in T\}$, $\{a_t \wedge b_t : t \in T\}$ mają odpowiednie kresy górny i dolny, to:

a) $\bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t) = \bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t$,

b) $\bigcap_{t \in T} (a_t \wedge b_t) = \bigcap_{t \in T} a_t \wedge \bigcap_{t \in T} b_t$,

c) $\bigcap_{t \in T} a_t \vee \bigcap_{t \in T} b_t \leqslant \bigcap_{t \in T} (a_t \vee b_t)$.

D2.27. Krata $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywa się *zupełną* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej podzbiór niepusty posiada kres górny i dolny. Znaleźć przykład kraty zupełnej i kraty niezupełnej. Udowodnić, że każda krata skończona jest zupełna.

D2.28. Element $a \in L$ nazywa się *zerem* (*jednością*) w kracie $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ jeśli spełnia on warunek

$$\bigwedge_x (a \wedge x = a) \; [\bigwedge_x (a \vee x = a)].$$

a) Udowodnić, że w kracie jest co najwyżej jedno zero.

b) Udowodnić, że w kracie jest co najwyżej jedna jedność.

c) Znaleźć kratę z jednością, ale bez zera.

d) Znaleźć kratę z zerem, ale bez jedności.

e) Czy w kracie zero może być równocześnie jednością?

D2.29. Niech krata $\mathfrak{L}'$ będzie kratą określoną w zadaniu D2.13.

a) Udowodnić, że jeśli krata ma zero, to krata $\mathfrak{L}'$ ma jedność.

b) Udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia a.

c) Udowodnić analogiczne do a twierdzenie w przypadku, gdy krata $\mathfrak{L}$ ma jedność.

d) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{L}$ ma zero i jedność, to $\mathfrak{L}'$ także je posiada.

e) Czy jeśli $\mathfrak{L}$ jest kratą rozdzielną, to $\mathfrak{L}'$ także jest kratą rozdzielną?

f) Czy jeśli $\mathfrak{L}$ jest kratą modularną, to $\mathfrak{L}'$ także jest kratą modularną?

D2.30. *Ideałem* w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy niepusty podzbiór $I \subset L$ spełniający warunki:

I1 $a \in I \wedge b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$,

I2 $a \in I \wedge b \leqslant a \Rightarrow b \in I$.

Udowodnić, że L jest ideałem w $\mathfrak{L}$.

D2.31. Udowodnić, że warunki I1 i I2 mogą być zastąpione jednym I1½

$$a \in I \wedge b \in I \Leftrightarrow a \vee b \in I.$$

D2.32. Udowodnić, że jeśli 0 jest zerem w kracie $\mathfrak{L}$, to

a) $\{0\}$ jest ideałem w $\mathfrak{L}$.

b) 0 należy do każdego ideału w $\mathfrak{L}$.

c) $\{0\}$ jest częścią wspólną wszystkich ideałów w $\mathfrak{L}$.

D2.33. Udowodnić, że jeśli $a \in L$, to zbiór $(a) = \{b : b \leqslant a\}$ jest ideałem w kracie $\mathfrak{L}$. Nazywamy go *ideałem głównym* wyznaczonym przez a.

D2.34. Udowodnić, że na to, by w kracie $\mathfrak{L}$ istniało zero potrzeba i wystarcza, by część wspólna wszystkich ideałów w $\mathfrak{L}$ była niepusta.

D2.35. *Filtrem* w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy podzbiór niepusty $F \subset L$ spełniający warunki:

F1 $a \in F \wedge b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$,

F2 $a \in F \wedge a \leqslant b \Rightarrow b \in F$.

Udowodnić, że L jest filtrem w $\mathfrak{L}$.

Co oznacza znak $\wedge$ w poprzedniku zdania F1, a co w następniku?

D2.36. Udowodnić, że warunki F1, i F2 mogą być zastąpione jednym F1½

$$a \in F \wedge b \in F \Leftrightarrow a \wedge b \in F.$$

D2.37. Udowodnić, że jeśli 1 jest jednością w kracie $\mathfrak{L}$, to

a) $\{1\}$ jest filtrem w $\mathfrak{L}$.

b) 1 należy do każdego filtru w $\mathfrak{L}$.

c) $\{1\}$ jest częścią wspólną wszystkich filtrów w $\mathfrak{L}$.

D2.38. Udowodnić, że jeśli $a \in L$, to zbiór $[a] = \{b : a \leqslant b\}$ jest filtrem w $\mathfrak{L}$. Nazywamy go *filtrem głównym* wyznaczonym przez a.

D2.39. Udowodnić, że w kracie skończonej każdy ideał i każdy filtr są główne.

D2.40. Udowodnić, że jeśli w kracie zupełnej $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ porządek $\leqslant$ wyznaczony przez działania $\wedge$ i $\vee$ jest porządkiem liniowym, to każdy ideał w $\mathfrak{L}$ jest główny. Wskazać przykład dowodzący, że warunek zupełności jest istotny.

D2.41. Udowodnić, że w kracie zupełnej istnieje zero i jedność. Wywnioskować stąd, że w każdej kracie skończonej istnieje zero i jedność.

D2.42. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ będzie kratą, a $\leqslant$ porządkiem wyznaczonym przez działania. Udowodnić, że jeżeli dla każdego podzbioru $X \subset L$, $\langle X, \leqslant \rangle$ jest kratą (to znaczy kresy par elementów z X są w X), to $\leqslant$ jest porządkiem liniowym. Udowodnić, że wystarczy, by wymienioną własność posiadały podzbiory skończone (a nawet dwuelementowe).

D2.43. Udowodnić, że jeśli w kracie rozdzielnej z zerem i jednością $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ spełniony jest warunek

$$\bigvee_b [(a \wedge b = 0) \wedge (a \vee b = 1)],$$

to element b jest wyznaczony przez a jednoznacznie.

Algebrą Boole'a nazywamy system relacyjny $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ taki, że $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ jest kratą rozdzielną z zerem i jednością, zaś działanie $\sim$ jest działaniem jednoargumentowym i spełnia warunki:

$$a \wedge \sim a = 0, \quad a \vee \sim a = 1.$$

D2.44. Udowodnić, że jeżeli $a \vee b = 1$ i $a \wedge b = 0$, to $b = \sim a$.

D2.45. Udowodnić, że $\sim \sim a = a, p \leqslant q \Leftrightarrow \sim q \leqslant \sim p$.

D2.46. Udowodnić prawa de Morgana:

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q, \quad \sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q.$$

D2.47. Niech $\mathfrak{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$. Dla kraty $\mathfrak{A}_0 = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ przeprowadzamy konstrukcję opisaną w zadaniu D2.13. Jak należy zdefiniować działania $\sim'$, stałe $0'$ i $1'$, by system $\mathfrak{A}' = \langle A, \wedge', \vee', \sim', 0', 1' \rangle$ był algebrą Boole'a? Jeśli I był ideałem w $\mathfrak{A}$, czym będzie w $\mathfrak{A}'$? Czym w $\mathfrak{A}'$ będzie zbiór F, który w $\mathfrak{A}$ był filtrem?

D2.48. W zbiorze $2 = \{0, 1\}$ wprowadzamy działania $\wedge, \vee$ i $\sim$ wzorami:

$$x \wedge y = \min(x, y) \quad x \vee y = \max(x, y) \quad \sim x = 1 - x.$$

Udowodnić, że system $\mathbf{2} = \langle 2, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ jest algebrą Boole'a.

D2.49. Niech $\langle X, 0\rangle$ będzie przestrzenią topologiczną, O rodziną zbiorów otwartych w X, Cl operacją domknięcia, zaś Int operacją wnętrza w tej topologii.

Zbiorem *regularnym* otwartym nazywamy zbiór A taki, że $A = \mathrm{Int}\,[\mathrm{Cl}(A)]$. W rodzinie wszystkich zbiorów regularnych otwartych wprowadzamy działania

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = \mathrm{Int}[\mathrm{Cl}(A \cup B)], \quad \sim A = X - \mathrm{Cl}\, A,$$
$$0 = O, \quad 1 = X.$$

Udowodnić, że zdefiniowaliśmy algebrę Boole'a.

D2.50. Algebra Boole'a $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ jest *zupełna* jeśli krata $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ jest zupełna. Udowodnić, że jeśli kres górny i dolny w algebrze rozważanej w zadaniu D2.49 określimy jako:

$$\bigcap_{t\in T} X_t = \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\bigcap_{t\in T} X_t), \qquad \bigcup_{t\in T} X_t = \mathrm{Int}\,[\mathrm{Cl}\,(\bigcup_{t\in T} X_t)],$$

gdzie znaki $\bigcap$ i $\bigcup$ po lewej stronie oznaczają kresy, zaś po prawej zwyczajne działania mnogościowe, to rozważana algebra jest zupełna.

D2.51. Udowodnić, że jeśli kres górny $\bigcup_{t\in T} a_t$ istnieje, to kres dolny $\bigcap_{t\in T} (\sim a_t)$ także istnieje i $\sim \bigcup_{t\in T} a_t = \bigcap_{t\in T} (\sim a_t)$. Analogicznie dla kresu górnego.

D2.52. Filtr F w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ nazywamy pierwszym, jeśli $a \vee b \in F \rightarrow a \in F \vee b \in F$. Udowodnić, że w algebrze Boole'a warunek ten jest równoważny następującemu: $a \in F$ lub $\sim a \notin F$. Wprowadzić pojęcie ideału pierwszego i udowodnić analogiczne twierdzenie.

D2.53. Filtrem (ideałem) właściwym w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ nazywamy taki filtr (ideał), który jest różny od L. Filtr F (ideał I) nazywamy *maksymalnym*. Filtr maksymalny nazywamy też *ultrafiltrem*, jeśli nie istnieje taki właściwy filtr F' (ideał I'), że $F \subset F'$ i $F \neq F' (I \subset I'$ i $I \neq I')$.

Udowodnić, że w algebrze Boole'a $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ filtr pierwszy właściwy jest maksymalny. Udowodnić twierdzenie odwrotne.

D2.54. Udowodnić, że dla każdego filtru właściwego istnieje maksymalny filtr właściwy zawierający go.

D2.55. Udowodnić, że dla ustalonego elementu $a \in A$, dla każdego filtru F, nie zawierającego a istnieje maksymalny filtr G nie zawierający a i taki, że $F \subset G$.

D2.56. *Homomorfizmem Boole'a* nazywamy odwzorowanie

$f: A \to A_1$, gdzie $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ i $\mathfrak{a}^* = \langle A_1, \wedge_1, \vee_1, \sim_1, 0_1, 1_1\rangle$

są algebrami Boole'a i spełniające warunki:

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge_1 f(b), \quad f(a \vee b) = f(a) \vee_1 f(b),$$

$$f(\sim a) = \sim_1 f(a), \quad f(0) = 0_1, \quad f(1) = 1_1.$$

Udowodnić, że jeśli f jest homomorfizmem Boole'a, to $f^{-1} * \{1_1\}$ jest filtrem, a $f^{-1} * \{0_1\}$ ideałem w A.

Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ i $\mathfrak{a}_1 = \langle A_1, \wedge_1, \vee_1, \sim_1, 0_1, 1_1\rangle$ będą algebrami Boole'a. Mówimy, że $\mathfrak{a}$ izomorficzne z $\mathfrak{a}_1$ ($\mathfrak{a} \approx \mathfrak{a}_1$) jeśli istnieje homomorfizm Boole'a $f: A \xrightarrow[1-1]{\text{na}} A_1$.

Taki homomorfizm nazywamy *izomorfizmem*.

D2.57. Udowodnić, że jeśli F jest filtrem maksymalnym właściwym w algebrze Boole'a $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$, zaś odwzorowanie h zbioru A w 2 jest określone wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in F, \\ 0, & \text{jeśli } x \notin F, \end{cases}$$

to jest homomorfizmem Boole'a.

Udowodnić twierdzenie odwrotne.

D2.58. Udowodnić, że każda algebra Boole'a $\mathfrak{a}$ zawiera podalgebrę izomorficzną z **2**.

D2.59. Niech φ będzie wyrażeniem rachunku zdań, zaś T_φ zbiorem zmiennych zdaniowych w φ. Odwzorowanie v zbioru T_φ w algebrę Boole'a rozszerzamy przez indukcję jak następuje:

$$v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q), \quad v(p \vee q) = v(p) \vee v(q), \quad v(\sim p) = \sim v(p),$$

$$v(p \Rightarrow q) = \sim v(p) \vee v(q), \quad v(p \Leftrightarrow q) = (v(p) \wedge v(q)) \vee (\sim v(p) \wedge \sim v(q)).$$

Udowodnić, że formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy przy dowolnym wartościowaniu v w dowolnej algebrze Boole'a przybiera wartość 1.

D2.60. Udowodnić, że jeżeli I jest ideałem w $\mathfrak{a}$, to $\{x : \sim x \in I\}$ jest filtrem i na odwrót.

Udowodnić, że analogiczne twierdzenie zachodzi dla filtrów pierwszych.

D2.61. Niech F będzie filtrem w $\mathfrak{a}$, definiujemy relację $\sim_F$ w A jak następuje:

$$x \sim_F y \Leftrightarrow [(x \vee \sim y) \wedge (y \vee \sim x)] \in F.$$

Udowodnić, że $\sim_F$ jest relacją równoważności.

Zdefiniować działania w $A/_{\sim_F}$ tak, by otrzymać algebrę Boole'a.

D2.62. Udowodnić, że jeśli h jest epimorfizmem Boole'a (tj. homomorfizmem „na"), to $h(\mathfrak{a}) \approx \mathfrak{a}/_{\sim_F}$, gdzie F jest przeciwobrazem jedności.

D2.63. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$, $\mathfrak{a}_1 = \langle A_1, \wedge_1, \vee_1, \sim_1, 0_1, 1_1\rangle$ będą dwiema algebrami Boole'a. W produkcie $A \times A_1$ definiujemy działania $\wedge', \vee', \sim', 0_1', 1'$ jak następuje:

$$\langle a, a_1\rangle \wedge' \langle b, b_1\rangle = \langle a \wedge b, a_1 \vee_1 b_1\rangle,$$

$$\langle a, a_1\rangle \vee' \langle b, b_1\rangle = \langle a \vee b, a_1 \wedge_1 b_1\rangle, \quad \sim'\langle a, a_1\rangle = \langle \sim a, \sim_1 a_1\rangle,$$

$$0' = \langle 0, 1_1\rangle, \quad 1' = \langle 1, 0_1\rangle.$$

Udowodnić, że $\langle A \times A_1, \wedge', \vee', \sim', 0', 1'\rangle$ jest algebrą Boole'a.

D2.64. Niech $\{\mathfrak{a}_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną algebr Boole'a $\mathfrak{a}_t = \langle A_t, \wedge_t, \vee_t, \sim_t, 0_t, 1_t\rangle$.

Definiujemy $\prod_{t \in T} \mathfrak{a}_t = \langle \underset{t \in T}{P} A_t, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$, gdzie działania $\wedge, \vee, \sim$, $0, 1$ są określone wzorami:

$$f \wedge g = h \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} h(t) = f(t) \wedge_t g(t),$$

$$f \vee g = h \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} h(t) = f(t) \vee_t g(t),$$

$$\sim f = g \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} g(t) = \sim_t f(t),$$

$$0 = \{\langle t, 0_t\rangle : t \in T\}, \quad 1 = \{\langle t, 1_t\rangle : t \in T\}.$$

Udowodnić, że $\prod_{t \in T} \mathfrak{a}_t$ jest algebrą Boole'a.

D2.65. Element $a \in A$ nazywamy *atomem*, jeśli

$$\bigwedge_x [a \wedge x \neq a \Rightarrow a \wedge x = 0].$$

Algebra Boole'a nazywa się *atomowa*, jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje atom a taki, że $a \leqslant x$.

Udowodnić, że dla każdego zbioru X algebra Boole'a $\langle \mathscr{P}(X), \cap, \cup, -, O, X\rangle$ jest atomowa.

Podać przykład nieatomowej algebry Boole'a.

D2.66. Udowodnić, że każda skończona algebra Boole'a jest atomowa.

D2.67. Niech $\mathfrak{a}$ będzie zupełną atomową algebrą Boole'a, zaś $\overline{At}$ zbiorem wszystkich atomów algebry $\mathfrak{a}$. Udowodnić, że odwzorowanie $h : A \to \mathscr{P}(At)$ określone w następujący sposób: $h(a) = \{x \in At : x \leqslant a\}$ jest izomorfizmem $\mathfrak{a}$ i $\langle \mathscr{P}(At), \cap, \cup, -, At \rangle$.

D2.68. Udowodnić, że jeżeli $\mathfrak{a}$ jest skończoną algebrą Boole'a, to istnieje liczba naturalna n taka, że $\overline{\overline{A}} = 2^n$.

D2.69. Udowodnić, że a jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy filtr $[a]$ jest pierwszy.

D2.70. Udowodnić, że a jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa filtry F_1 i F_2 takie, że $a \in F_1 \cap F_2$ są równe.

D2.71. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ będzie algebrą Boole'a, zaś X będzie zbiorem wszystkich filtrów właściwych w $\mathfrak{a}$. Każdemu $a \in A$ przyporządkowujemy zbiór $X_a \subset X$ filtrów pierwszych zawierających a.

Udowodnić, że

a) $X_a \cap X_b = X_{a \wedge b}$,

b) $X_a \cup X_b = X_{a \vee b}$,

c) $X - X_a = X_{\sim a}$.

D2.72. Udowodnić, że definiując w X topologię przez zadanie bazy, której elementami są zbiory postaci X_a dla $a \in A$, otrzymujemy zwartą i zerowymiarową przestrzeń Hausdorffa.

D2.72. Udowodnić następujące twierdzenie: Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą wszystkich podzbiorów otwartodomkniętych pewnej przestrzeni topologicznej.

D2.74. Algebra $\mathfrak{a}$ nazywana jest *gęstą* wtedy i tylko wtedy, gdy $\leqslant$ jest gęstym porządkiem. Udowodnić, że algebra gęsta jest zawsze bezatomowa.

D2.75. *Pierścieniem Boole'a* nazywamy pierścień przemienny z jednością, w którym każdy element jest idempotentny, to znaczy $\bigwedge_a a^2 = a$.

Udowodnić, że jeśli działanie $\dot{-}$ w algebrze Boole'a $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ jest zdefiniowane wzorem $a \dot{-} b = (\sim a \wedge b) \vee (\sim b \wedge a)$, to system relacyjny $\langle A, \wedge, \dot{-}, 0, 1 \rangle$ jest pierścieniem Boole'a.

Co jest odejmowaniem w tym pierścieniu? Sprawdź, że w pierścieniu Boole'a dla każdego a mamy $a \dot{-} a = 0$.

D2.76. Niech $\mathscr{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ będzie pierścieniem przemiennym z jednością. Udowodnić, że zbiór W elementów idempotentnych pierścienia

$\mathscr{P}$ z działaniami $\cdot'$ i $+'$, gdzie $a \cdot' b = a \cdot b$, $a +' b = a+b-2ab$ jest pierścieniem Boole'a.

D2.77. Niech $\mathscr{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ będzie pierścieniem Boole'a. Definiujemy działania $\wedge$, $\vee$, $\sim$, wzorami:

$$a \wedge b = a \cdot b, \quad a \vee b = a+b+a \cdot b, \quad \sim a = 1+a.$$

Udowodnić, że $\mathfrak{a} = \langle P, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ jest algebrą Boole'a.

D2.78. *Zbiór wielomianów Boole'a* definiujemy przez indukcję jak następuje:

a) Każda zmienna jest wielomianem; 0, 1 są wielomianami.

b) Jeśli f i g są wielomianami, to $f \wedge g$, $f \vee g$, $\sim f$ są także wielomianami.

c) Każdy wielomian powstaje ze zmiennych 0, 1 poprzez skończoną ilość zastosowań operacji z punktu b. Wielomian f nazywamy *normalnym*, jeśli ma on postać $f = u_1 \vee \ldots \vee u_n$, gdzie $u_l = v_{l_1} \wedge \ldots \wedge v_{l_k}$, zaś każde z v_j jest postaci x_j bądź $\sim x_j$, gdzie x_j jest zmienną.

Udowodnić, że dla każdego wielomianu f istnieje wielomian normalny f_1 taki, że dla dowolnej algebry Boole'a $\mathfrak{b} = \langle B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ i dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in B$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n).$$

D2.79. Jaki jest związek zadania D2.78 i zadania 1.80?

D2.80. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ będzie kratą rozdzielną z zerem i jednością. Element $a \in L$ nazywamy *boolowskim*, jeśli istnieje $b \in L$ takie, że $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$.

Udowodnić, że podkrata złożona z elementów boolowskich tworzy algebrę Boole'a.

D2.81. Niech $\mathfrak{b} = \langle B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ będzie algebrą Boole'a $\mathfrak{b}^n = \underbrace{\mathfrak{b} \times \ldots \times \mathfrak{b}}_{n}$, wreszcie $P = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : x_1 \geqslant x_2 \geqslant, \ldots, \geqslant x_n\}$.

Udowodnić, że P wraz z działaniami wziętymi z $\mathfrak{b}^n$ jest kratą rozdzielną z zerem i jednością.

Udowodnić, że algebra Boole'a elementów boolowskich kraty p jest izomorficzna z $\mathfrak{b}$.

D2.82. Czy podkrata algebry Boole'a musi być algebrą Boole'a?