

RELACJE PORZĄDKUJĄCE

Relacją częściowo porządkującą zbiór A nazywamy relację $R \subset A^2$ spełniającą warunki:

a) Zwrotność

$$\bigwedge_{x \in A} (\langle x, x \rangle \in R), \quad \left(\bigwedge_{x \in A} (xRx) \right).$$

b) Antysymetria

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} [(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R) \Rightarrow x = y],$$

$$\left(\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} [(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y] \right).$$

c) Przechodność

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} \bigwedge_{z \in A} [(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R],$$

$$\left(\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} \bigwedge_{z \in A} [(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz] \right).$$

Jeśli relacja R spełnia dodatkowo warunek spójności:

d) Spójność

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} (\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R \vee x = y),$$

$$\left(\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} (xRy \vee yRx \vee x = y) \right),$$

to nazywamy ją relacją liniowo porządkującą.

W dawniejszej literaturze często relacją liniowo porządkującą nazywano relację asymetryczną, przechodnią i spójną (por. zad. 4.18 i 4.19).

Śród relacji liniowo porządkujących wyróżniamy relacje dobrze porządkujące, to znaczy takie, które spełniają dodatkowo warunek e):

$$e) \quad \bigwedge_{X \subset A} \{X \neq \emptyset \Rightarrow \bigvee_y [y \in X \wedge \bigwedge_z (z \in X \Rightarrow \langle y, z \rangle \in R)]\},$$

$$(\bigwedge_{X \subset A} [X \neq \emptyset \Rightarrow \bigvee_{y \in X} \bigwedge_{z \in X} (yRz)]).$$

Zbiorem częściowo (liniowo, dobrze) uporządkowanym nazywamy parę $\langle A, R \rangle$ taką, że R częściowo (liniowo, dobrze) porządkuje A .

Elementy wyróżnione:

a) Element $a \in A$ nazywamy *maksymalnym* w zbiorze $\langle A, R \rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (aRx \Rightarrow x = a).$$

b) Element $a \in A$ nazywamy *minimalnym* w zbiorze $\langle A, R \rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (xRa \Rightarrow x = a).$$

c) Element $a \in A$ nazywamy *największym* w zbiorze $\langle A, R \rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (xRa).$$

d) Element $a \in A$ nazywamy *najmniejszym* w zbiorze $\langle A, R \rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (aRx).$$

Łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, R \rangle$ nazywamy każdy podzbiór niepusty $B \subset A$ taki, że $\langle B, R \cap B^2 \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

Zauważmy, że $R \cap B^2$ jest to po prostu relacja R ograniczona do elementów zbioru B .

Antyłańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, R \rangle$ nazywamy każdy zbiór $B \subset A$ taki, że

$$\bigwedge_{x, y \in B} [x \neq y \Rightarrow \sim xRy \wedge \sim yRx].$$

A więc jeśli B jest łańcuchem, to każde dwa elementy zbioru B są *porównywalne* (w sensie relacji R), natomiast jeśli jest antyłańcuchem, to każde dwa elementy zbioru B są *nieporównywalne*.

Każdy zbiór jednoelementowy jest łańcuchem i antyłańcuchem.

Jeśli zbiór X zawiera się w A , to *ograniczeniem górnym* zbioru X nazywamy każdy taki element $a \in A$, że $\bigwedge_{x \in X} (xRa)$. Podobnie definiujemy *ograniczenie dolne* zbioru $X \subset A$.

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA: Niech $\langle A, R \rangle$ będzie zbiorem uporządkowanym takim, że dla każdego łańcucha istnieje w A górne ograniczenie. Wtedy w A istnieje co najmniej jeden element maksymalny. Co więcej, dla każdego $x \in A$ istnieje element maksymalny a taki, że xRa .

8.1. Niech relacja $R \subset (\mathcal{N} - \{0\})^2$ będzie określona następująco:

$$xRy \Rightarrow \bigvee_{z \in \mathcal{N}} (xz = y)$$

(tradycyjnie relację tę oznaczamy symbolem $x|y$).

- Udowodnić, że $|$ jest relacją częściowo porządkującą,
- znaleźć wszystkie elementy minimalne,
- udowodnić, że w zbiorze $\langle \mathcal{N} - \{0\}, | \rangle$ nie ma elementów maksymalnych,
- znaleźć ogólną postać łańcucha w zbiorze $\langle \mathcal{N} - \{0\}, | \rangle$,
- znaleźć ogólną postać antyłańcucha w zbiorze $\langle \mathcal{N} - \{0\}, | \rangle$,
- udowodnić, że relacja inkluzji w zbiorze wszystkich łańcuchów zbioru $\langle \mathcal{N} - \{0\}, | \rangle$ jest częściowym porządkiem, znaleźć postać łańcuchów minimalnych i maksymalnych.

8.2. Niech X będzie zbiorem, zaś $\mathcal{P}(X)$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X . Udowodnić, że relacja $\subset$ częściowo porządkuje zbiór $\mathcal{P}(X)$. Znaleźć element najmniejszy i największy w zbiorze $\langle \mathcal{P}(X), \subset \rangle$.

8.3. Załóżmy, że zbiór X ma co najmniej dwa elementy. Rozważmy zbiór $U = \mathcal{P}(X) - \{0\} - \{X\}$, oraz relację $\subset$ ograniczoną do elementów tego zbioru, zbadać

- czy w zbiorze $\langle U, \subset \rangle$ istnieje element najmniejszy,
- czy w zbiorze $\langle U, \subset \rangle$ istnieje element największy,
- znaleźć postać elementów minimalnych i maksymalnych w $\langle U, \subset \rangle$,
- jaka jest moc zbioru elementów minimalnych i maksymalnych w $\langle U, \subset \rangle$. Rozważyć szczególny przypadek, gdy X jest zbiorem dwuelementowym.

8.4. Udowodnić, że jeśli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i $Y \subset X$, to zbiór $\langle Y, R \cap Y^2 \rangle$ także jest zbiorem częściowo uporządkowanym. Czy twierdzenie jest prawdziwe, jeśli zbiór $\langle X, R \rangle$ jest liniowo (bądź dobrze) uporządkowany? Co można powiedzieć o stosunku elementów wyróżnionych w $\langle X, R \rangle$ i $\langle Y, R \cap Y^2 \rangle$?

8.5. Zbiór $\langle X, R^{-1} \rangle$ nazywamy *duelnym* do $\langle X, R \rangle$.

- Udowodnić, że jeżeli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to $\langle X, R^{-1} \rangle$ także jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

b) Czy analogiczne twierdzenie jest prawdziwe, jeśli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym?

c) Czy analogiczne twierdzenie jest prawdziwe, jeśli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym?

d) Jaki jest związek elementów wyróżnionych w $\langle X, R \rangle$ i w $\langle X, R^{-1} \rangle$?

8.6. a) Udowodnić, że jeżeli w zbiorze częściowo uporządkowanym jest element największy, to jest on jedynym elementem maksymalnym.

b) Udowodnić, że jeżeli w zbiorze częściowo uporządkowanym jest element najmniejszy, to jest on jedynym elementem minimalnym.

c) Jaki związek pomiędzy punktami a i b sugeruje zadanie 8.5?

8.7. Czy dla danego $X \neq \emptyset$ można tak określić relację R , by równocześnie:

a) Zbiór $\langle X, R \rangle$ był częściowo uporządkowany.

b) R była relacją równoważności w X .

8.8. Czy dla danego zbioru X takiego, że $\bar{X} \geq 2$ można określić relację R taką, by równocześnie:

a) Zbiór $\langle X, R \rangle$ był liniowo uporządkowany.

b) R była relacją równoważności.

8.9. Załóżmy, że zbiór $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór $\langle X, R^{-1} \rangle$ był także dobrze uporządkowany.

8.10. Udowodnić, że jeśli X jest zbiorem skończonym, zaś $\langle X, R \rangle$ zbiorem liniowo uporządkowanym, to zbiór $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany.

8.11. Znaleźć przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego.

8.12. Znaleźć przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego.

8.13. a) Udowodnić, że jeżeli zbiór X jest skończony, to w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R \rangle$ istnieje co najmniej jeden element maksymalny.

b) Udowodnić analogiczne twierdzenie dla elementów minimalnych.

8.14. Udowodnić, że jeżeli zbiór X jest skończony i w $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny (minimalny), to jest on elementem naj-

większym (najmniejszym). Czy założenie skończoności zbioru X jest istotne?

8.15. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by częściowo uporządkowany zbiór $\langle X, R \rangle$ był liniowo uporządkowany jest, by każdy antyłańcuch był jednoelementowy.

8.16. Udowodnić, że w zbiorze liniowo uporządkowanym element minimalny (maksymalny), o ile istnieje, jest elementem najmniejszym (największym).

8.17. Co oznacza fakt, że A jest łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, R \rangle$?

8.18. Dowieść, że w zbiorze liniowo uporządkowanym każdy skończony podzbiór niepusty ma element największy i najmniejszy.

8.19. Udowodnić, że w zbiorze częściowo uporządkowanym każdy skończony podzbiór niepusty posiada elementy minimalne i maksymalne.

8.20. Dla każdego $n \in \mathcal{N}$ skonstruować przykład zbioru częściowo uporządkowanego, mającego dokładnie n elementów minimalnych. Analogicznie dla elementów maksymalnych.

8.21. W zbiorze T wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do zbioru $\mathcal{N}$ (a więc w zbiorze $\bigcup_{k \in \mathcal{N}} \mathcal{N}^k$) wprowadzamy relację R jak następuje: $xRy \Leftrightarrow$ ciąg x jest odcinkiem początkowym (niekoniecznie właściwym) ciągu y .

- Udowodnić, że relacja R jest częściowym porządkiem.
- Czy w zbiorze $\langle T, R \rangle$ istnieje element największy?
- Czy w zbiorze $\langle T, R \rangle$ istnieje element minimalny?
- Jaka jest moc zbioru łańcuchów w zbiorze $\langle T, R \rangle$?

8.22. Rozpatrujemy zbiór $T = \{2^n : n \in \mathcal{N}\} \cup \{3\}$ wraz z relacją podzielności (porównaj zadanie 8.1).

- Czy w zbiorze $\langle T, | \rangle$ są elementy minimalne, maksymalne?
- Czy w zbiorze $\langle T, | \rangle$ jest element najmniejszy?
- Narysować diagram relacji.

8.23. Rozważamy zbiór $T = \{2, 3, \dots, 15\}$ wraz z relacją podzielności ograniczoną do elementów tego zbioru.

- Narysować diagram relacji.
- Wskazać elementy wyróżnione.
- Wskazać wszystkie łańcuchy długości 3.

8.24. Niech T będzie zbiorem wszystkich funkcji określonych na od-

cinku $\langle 0,1 \rangle$ o wartościach w $\mathcal{R}^-$ ($T = \langle^{10}\mathcal{R}^+$). Definiujemy relację R wzorem

$$fRg \Leftrightarrow \bigwedge_x [f(x) \leq g(x)].$$

a) Udowodnić, że R jest częściowym porządkiem.

b) Wskazać elementy wyróżnione w $\langle T, R \rangle$.

8.25. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, S \rangle$ oraz zbiór $T \neq \emptyset$. W zbiorze F wszystkich funkcji z T w X (tj. ${}^T X$) określamy relację R wzorem

$$fRg \Leftrightarrow \bigvee_{t \in T} [f(t) S g(t)].$$

a) Udowodnić, że relacja R jest częściowym porządkiem.

b) Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by w $\langle F, R \rangle$ był element minimalny (maksymalny).

c) Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by w $\langle F, R \rangle$ był element największy (najmniejszy).

8.26. Niech A_t dla $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ będzie rodziną zbiorów określoną jak następuje:

$$A_t = \{z \in \mathcal{C} : k_t + 1 \leq \operatorname{im} z \leq t + 2\},$$

gdzie

$$k_t = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, 2, 4, \\ +1 & \text{dla } t = 1, \\ -1 & \text{dla } t = 3, 5. \end{cases}$$

a) Rozpatrując powyższą rodzinę jako zbiór częściowo uporządkowany przez relację zawierania znaleźć elementy wyróżnione.

b) Czy istnieją elementy najmniejszy i największy?

c) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.27. Niech A_t dla $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ będzie rodziną zbiorów określoną jak następuje:

$$A_t = \{z \in \mathcal{C} : |z - k_t| \leq t\},$$

gdzie

$$k_t = \begin{cases} 2 & \text{dla } t = 1, \\ 0 & \text{dla } t = 2, 3, 6, \\ -1 & \text{dla } t = 4, \\ 1 & \text{dla } t = 5. \end{cases}$$

Rozpatrujemy rodzinę tę jako częściowo uporządkowaną przez relację zawierania.

- Znaleźć elementy wyróżnione.
- Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.28. Niech A_t dla $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ będzie rodziną zbiorów określoną jak następuje:

$$A_t = \{x \in \mathcal{R} : k_t \leq x \leq t+1\},$$

gdzie

$$k_t = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, 2, \\ -1 & \text{dla } t = 1, 3, \\ -2 & \text{dla } t = 4, 6, \\ -3 & \text{dla } t = 5. \end{cases}$$

a) Rozpatrując powyższą rodzinę jako zbiór częściowo uporządkowany przez relację zawierania znaleźć elementy wyróżnione.

b) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.29. Niech A_t dla $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\mathcal{W}$ określoną jak następuje:

$$A_t = \{x \in \mathcal{W} : t < x < t^2\}.$$

a) Rozpatrując powyższą rodzinę jako zbiór częściowo uporządkowany przez relację zawierania, znaleźć elementy wyróżnione.

b) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.30. Niech $\alpha(n)$ będzie liczbą różnych dzielników pierwszych liczby naturalnej n . W zbiorze $\mathcal{N} - \{0, 1\}$ określamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow [\alpha(x) < \alpha(y)] \vee [\alpha(x) = \alpha(y) \wedge x \leq y].$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N} - \{0, 1\}, R \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

b) Czy jest to zbiór liniowo uporządkowany?

c) Znaleźć elementy wyróżnione.

8.31. Niech $\beta(n)$ będzie liczbą różnych dzielników liczby naturalnej n . W zbiorze $\mathcal{N} - \{0\}$ określamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow [\beta(x) < \beta(y)] \vee [\beta(x) = \beta(y) \wedge x \leq y].$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N} - \{0\}, R \rangle$ jest częściowo uporządkowany, znaleźć elementy wyróżnione.

b) Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

8.32. W zbiorze $\mathcal{N}^+$ wprowadzamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow (2|x \wedge 2|y \wedge y \leq x) \vee (2|x \wedge \sim 2|y) \vee (\sim 2|x \wedge \sim 2|y \wedge x \leq y).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N} - \{0\}, R \rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

8.33. W zbiorze $\mathcal{N}\mathcal{N}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$\underline{aRb} \Leftrightarrow \bigwedge_n (a_n \leq b_n).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N}\mathcal{N}, R \rangle$ jest częściowo uporządkowany, znaleźć elementy wyróżnione.

b) Czy zbiór ten jest uporządkowany liniowo?

8.34. W zbiorze $\mathcal{N}\mathcal{N}$ wprowadzamy relację S wzorem

$$\underline{aSb} \Leftrightarrow \bigvee_k \bigwedge_{n < k} (a_n = b_n \wedge a_k < b_k) \vee (a = b).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N}\mathcal{N}, S \rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) Udowodnić, że $\bigwedge_{\underline{a}, \underline{b}} (\underline{aRb} \Rightarrow \underline{aSb})$, gdzie R jest relacją rozważaną

w zadaniu 8.33.

8.35. W zbiorze $\mathcal{C}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow (\operatorname{Re} y \leq \operatorname{Re} x) \wedge (\operatorname{Im} y \leq \operatorname{Im} x).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{C}, R \rangle$ jest częściowo uporządkowany.

b) Czy zbiór ten jest uporządkowany liniowo?

8.36. W zbiorze $\mathcal{C}$ wprowadzamy relację S wzorem

$$xSy \Leftrightarrow (\operatorname{Re} y < \operatorname{Re} x) \vee [(\operatorname{Re} y = \operatorname{Re} x) \wedge (\operatorname{Im} y \leq \operatorname{Im} x)].$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{C}, S \rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

c) Udowodnić, że $\bigwedge_{x, y} (xRy \Rightarrow xSy)$, gdzie R jest relacją rozważaną

w zadaniu 8.35.

Element $x \in X$ nazywamy (bezpośrednim) *następnikiem* elementu y w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R \rangle$ jeśli spełniony jest warunek

$$yRx \wedge \bigwedge_z [(yRz \wedge zRx) \Rightarrow (y = z \vee z = x)].$$

8.37. Zdefiniować pojęcie poprzednika tak, by zachodził następujący związek: x jest poprzednikiem y w zbiorze $\langle X, R \rangle$ wtedy i tylko wtedy,

gdy x jest następnikiem y w zbiorze dualnym $\langle X, R^{-1} \rangle$ (porównaj zadanie 8.5).

8.38. Udowodnić, że w zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik?

8.39. W zbiorze liniowo uporządkowanym $\langle X, R \rangle$ każdy element posiada następnik. Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

8.40. a) Wskazać przykład zbioru częściowo uporządkowanego, w którym istnieje element najmniejszy, każdy element ma dokładnie dwa następniki i co najwyżej jeden poprzednik.

b) Jaka jest moc zbioru łańcuchów w takim zbiorze?

Zbiory częściowo uporządkowane $\langle X, R \rangle$ i $\langle Y, S \rangle$ nazywamy *podobnymi*, jeśli istnieje przekształcenie wzajemnie jednoznaczne $f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$ takie, że

$$\bigwedge_{x,y} [xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)].$$

Zapisujemy to $\langle X, R \rangle \approx \langle Y, S \rangle$.

8.41. Sprawdzić, że jeżeli $\langle X, R \rangle \approx \langle Y, S \rangle$, to $X \sim Y$.

8.42. a) Sprawdzić, że jeżeli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym i $\langle X, R \rangle \approx \langle Y, S \rangle$, to $\langle Y, S \rangle$ także jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

b) To samo dla dobrego porządku.

8.43. Udowodnić, że podobieństwo jest zwrotne, symetryczne i przechodnie. Dlaczego nie wolno nam zastosować zasady abstrakcji?

8.44. Udowodnić, że jeśli f ustala podobieństwo pomiędzy zbiorami $\langle X, R \rangle$ i $\langle Y, S \rangle$, to

a) f zachowuje elementy wyróżnicze (tj. obraz elementu maksymalnego jest elementem maksymalnym, itd.).

b) f zachowuje łańcuchy i antyłańcuchy, innymi słowy jeśli T jest łańcuchem (antyłańcuchem) w $\langle X, R \rangle$, to $f * T$ jest łańcuchem (antyłańcuchem) w $\langle Y, S \rangle$.

c) f zachowuje poprzedniki i następniki.

Każdemu zbiorowi częściowo uporządkowanemu przyporządkowujemy przedmiot zwany jego *typem relacyjnym* $TR(\langle X, R \rangle)$ tak, że $TR(\langle X, R \rangle) = TR(\langle Y, S \rangle) \Leftrightarrow \langle X, R \rangle \approx \langle Y, S \rangle$.

W przypadku zbioru liniowo uporządkowanego typ relacyjny nazy-

wamy *typem porządkowym*, zaś w przypadku zbioru dobrze uporządkowanego — *liczbą porządkową*. Jeśli typem zbioru $\langle X, R \rangle$ jest α , to typ zbioru dualnego $\langle X, R^{-1} \rangle$ oznaczamy przez α^* .

Wyróżniamy następujące typy porządkowe: ω — typ zbioru $\langle \mathcal{N}, \leq \rangle$, η — typ zbioru $\langle \mathcal{W}, \leq \rangle$, λ — typ zbioru $\langle \mathcal{Q}, \leq \rangle$.

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, R \rangle$ nazywamy *gęstym*, jeśli

$$\bigwedge_{x, y} [(xRy \wedge x \neq y) \Rightarrow \bigvee_z x \neq z \wedge z \neq y \wedge xRz \wedge zRy].$$

8.45. Udowodnić, że dla każdego typu α mamy $\alpha^{**} = \alpha$.

8.46. Udowodnić, że

a) Zbiór $\langle \mathcal{W}, \leq \rangle$ jest gęsty.

b) Zbiór $\langle \mathcal{Q}, \leq \rangle$ jest gęsty.

8.47. Udowodnić, że gęstość jest niezmiennikiem relacji podobieństwa, tzn. jeżeli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem gęstym i $\langle X, R \rangle \approx \langle Y, S \rangle$, to zbiór $\langle Y, S \rangle$ też jest gęsty. Wywnioskować stąd, że możemy mówić o typach porządkowych gęstych.

8.48. Udowodnić, że jeżeli $\bar{X} \geq 2$ i zbiór $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany, to nie jest on gęsty.

8.49. Czy jest gęsty zbiór $\langle X, R \rangle$ rozważany

a) w zadaniu 8.33,

b) w zadaniu 8.34.

8.50. Czy jest gęsty zbiór $\langle X, R \rangle$ rozważany

a) w zadaniu 8.35,

b) w zadaniu 8.36.

8.51. Jeśli zbiór $\langle X, R \rangle$ jest gęsty, zaś $x \in X$, $y \in X$, to czy y może być następnikiem elementu x ?

8.52. Udowodnić, że każdy typ gęsty, przeliczalny, bez najmniejszego ani największego elementu jest równy η .

Innymi słowy, jeśli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym przeliczalnym i gęstym, bez pierwszego i ostatniego elementu, to $\langle X, R \rangle \approx \langle \mathcal{W}, \leq \rangle$.

8.53. Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{Z} - \mathcal{N}, \leq \rangle$ ma typ ω^* .

8.54. Udowodnić, że $\eta^* = \eta$, to znaczy, że $\langle \mathcal{W}, \leq \rangle \approx \langle \mathcal{W}, \geq \rangle$.

8.55. Udowodnić, że $\lambda^* = \lambda$.

8.56. Udowodnić, że każdy zbiór liniowo uporządkowany $\langle X, R \rangle$ taki, że każdy element posiada następnik i poprzednik oraz jeśli xRy , to $\{z : xRz \wedge zRy\}$ jest skończony, jest podobny do zbioru $\langle \mathcal{Z}, \leq \rangle$.

8.57. Czy zbiór $\langle \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{1\}, \leq \rangle$ jest podobny do zbioru $\langle \mathcal{A}, \leq \rangle$? Jaka będzie odpowiedź, jeśli zbiór $\mathcal{A}$ uzupełnimy elementem ∞ , o którym zakładamy, że jest większy od wszystkich liczb naturalnych?

8.58. Podzbiór $Y \subset X$ nazywamy gęstym w zbiorze liniowo uporządkowanym $\langle X, R \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{x, y} [xRy \wedge x \neq y \Rightarrow \bigvee_z (z \in Y \wedge xRz \wedge zRy)].$$

Udowodnić, że

- a) X jest gęsty w $\langle X, R \rangle$,
- b) $\mathcal{W}$ jest gęsty w $\langle \mathcal{Q}, \leq \rangle$.

8.59. Udowodnić, że dla każdego zbioru $\langle X, R \rangle$ liniowo uporządkowanego posiadającego podzbiór gęsty mocy $\aleph_0$ istnieje taki podzbiór $Y \subset \mathcal{Q}$, że $\langle X, R \rangle \approx \langle Y, \leq \upharpoonright Y \rangle$.

8.60. Udowodnić, że jeżeli zbiory $\langle X, R \rangle$ i $\langle Y, S \rangle$ są uporządkowane liniowo, to są one podobne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$ takie, że

$$\bigwedge_{x, y \in X} [(xRy \Rightarrow f(x)Sf(y))].$$

8.61. Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{A}, \leq \rangle$ jest dobrze uporządkowany, natomiast zbiór $\langle \mathcal{A}, \geq \rangle$ nie jest dobrze uporządkowany.

8.62. Dowieść, że jeśli $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym i $X_1 \subset X$, to $\langle X_1, R \cap X_1^2 \rangle$ jest dobrze uporządkowany.

8.63. Udowodnić, że każda relacja $R \subset X^2$ spełniająca warunki b i c spełnia też warunki a, c, d (str. 74). Udowodnić, że osłabienie założeń przez pominięcie warunku b (antysymetria) jest niemożliwe.

8.64. Odcinkiem początkowym zbioru liniowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$ nazywamy każdy podzbiór $Y \subset X$ spełniający warunek

$$\bigwedge_{x, y} (x \in Y \wedge yRx \Rightarrow y \in Y).$$

- a) Jakie są odcinki zbioru $\langle \mathcal{A}, \leq \rangle$?
- b) Jakie są odcinki zbioru $\langle \mathcal{W}, \leq \rangle$.

8.65. Niech Y będzie niepustym odcinkiem początkowym zbioru $\langle \mathcal{W}, \leq \rangle$ nie posiadającym elementu ostatniego. Udowodnić, że $\langle Y, \leq \upharpoonright Y \rangle \approx \langle \mathcal{W}, \leq \rangle$.

8.66. Definiujemy $O_R(x) = \{y : yRx \wedge y \neq x\}$. Udowodnić, że $O_R(x)$ jest odcinkiem początkowym.

8.67. Udowodnić następującą zasadę indukcji porządkowej: Załóżmy, że zbiór $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany. Φ jest własnością (to znaczy podzbiorem zbioru X) taką, że

$$\bigwedge_{x \in X} \{ \bigwedge_y [y \in O_R(x) \Rightarrow \Phi(y)] \Rightarrow \Phi(x) \},$$

wtedy $\bigwedge_{x \in X} \Phi(x)$.

8.68. Udowodnić, że żaden odcinek właściwy zbioru dobrze uporządkowanego nie jest podobny do całego zbioru. Innymi słowy, jeśli $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany, Y jest odcinkiem $\langle X, R \rangle$ i $Y \neq X$, to $\sim(\langle Y, R \cap Y^2 \rangle \approx \langle X, R \rangle)$.

8.69. Załóżmy, że zbiór $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany i odwzorowanie $f: X \xrightarrow{1-1} X$ spełnia warunek $xRy \Rightarrow f(x)Rf(y)$. Udowodnić, że $\bigwedge_x xRf(x)$.

8.70. Korzystając z aksjomatu wyboru udowodnić lemat Kuratowskiego-Zorna.

8.71. Udowodnić, że dla każdej relacji $R \subset X^2$ takiej, że $\langle X, R \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, istnieje relacja S taka, że $R \subset S$ i zbiór $\langle X, S \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

8.72. Udowodnić następującą mocniejszą wersję twierdzenia z zadania 8.71: Dla każdego elementu maksymalnego a w zbiorze uporządkowanym $\langle X, R \rangle$ istnieje relacja S taka, że $R \subset S$, zbiór $\langle X, S \rangle$ jest liniowo uporządkowany i a jest elementem największym w $\langle X, S \rangle$.

8.73. Sformułować i udowodnić twierdzenie podobne do twierdzenia z zadania 8.72 dla elementów minimalnych.

8.74. Udowodnić (korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna) następującą formę aksjomatu wyboru:

Dla każdej rodziny $\{X_t\}_{t \in T}$ zbiorów niepustych istnieje funkcja $f: T \rightarrow \bigcup_{t \in T} X_t$ taka, że $f(t) \in X_t$.

8.75. Udowodnić (korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna) następującą formę aksjomatu wyboru:

Dla każdej rodziny $\{X_t\}_{t \in T}$ zbiorów niepustych parami rozłącznych istnieje zbiór W taki, że $\overline{W \cap X_t} = 1$.

8.76. Udowodnić, że w każdym pierścieniu z jednością istnieje ideał maksymalny.

8.77. Udowodnić istnienie bazy algebraicznej w dowolnej przestrzeni liniowej.

8.78. Udowodnić, że każdy antylańcuch zawarty jest w maksymalnym antylańcuchu.

8.79. Rozważmy zbiór $\langle \mathcal{P}(X), \leq \rangle$ oraz zbiór ${}^X\{0, 1\}$ wraz z relacją R określoną jak następuje:

$$f R g \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} [f(x) \leq g(x)].$$

Udowodnić, że

$$\langle \mathcal{P}(X), \leq \rangle \approx \langle {}^X\{0, 1\}, R \rangle.$$

8.80. Załóżmy, że $\{\langle X_i, R_i \rangle\}_{i \in I}$ jest rodziną zbiorów częściowo uporządkowanych i niepustych. Rozważmy zbiór

$$\langle \prod_{i \in I} X_i, R \rangle, \quad \text{gdzie} \quad f R g \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} [f(i) R_i g(i)].$$

- Udowodnić, że zbiór ten jest częściowo uporządkowany.
- Czy jeżeli wszystkie zbiory $\langle X_i, R_i \rangle$ są uporządkowane liniowo, to $\langle \prod_{i \in I} X_i, R \rangle$ jest uporządkowany liniowo?