

1. ZESTAW ZADAŃ 6: KATEGORIE

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **monomorfizmem kategoriowym** (lub **monikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu A i morfizmów $A \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} B$:

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **epimorfizmem kategoriowym** (lub **epikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu D i morfizmów $C \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} D$:

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

- (1) Rozważmy kategorię Set . Pokazać, że morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją różnowartościową.
- (2) Rozważmy kategorię Set . Pokazać, że morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest epimorfizmem kategoriowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją "na".
- (3) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $B \xrightarrow{\phi} C$ i $C \xrightarrow{\psi} D$ będą morfizmami. Pokazać, że:
 - (a) jeśli ϕ i ψ są monomorfizmami kategoriowymi, to $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategoriowym;
 - (b) jeśli $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategoriowym, to ϕ jest monomorfizmem kategoriowym;
 - (c) jeśli ϕ i ψ są epimorfizmami kategoriowymi, to $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategoriowym;
 - (d) jeśli $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategoriowym, to ψ jest epimorfizmem kategoriowym;
 - (e) jeśli ϕ jest izomorfizmem, to jest monomorfizmem kategoriowym i epimorfizmem kategoriowym.
- (4) Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Obiekt I kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem początkowym** (lub **uniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $I \xrightarrow{i} C$.
 Obiekt T kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem końcowym** (lub **kouniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{t} T$.
 Obiekt 0 kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem zerowym**, jeżeli jest równocześnie obiektem początkowym i końcowym. Pokazać, że:
 - (a) jednoznacznie wyznaczony morfizm $0 \rightarrow C$ jest monomorfizmem kategoriowym;
 - (b) jednoznacznie wyznaczony morfizm $C \rightarrow 0$ jest epimorfizmem kategoriowym.

Zadanie domowe: zadania 2 i 3 należy rozwiązać na zajęcia 18 maja.