

Zestaw zadań 5

1. Udowodnić, że w pierścieniu ideałów głównych A ideał $\mathfrak{q}$ jest prymarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest potęgą ideału pierwszego.
2. Udowodnić, że w pierścieniu $A = k[x, y]$, gdzie k jest pewnym ciałem, ideał $\mathfrak{q} = \langle x, y^2 \rangle$ jest prymarny, ale nie jest potęgą ideału pierwszego.
3. Udowodnić, że jeśli A jest dowolnym pierścieniem, zaś $\mathfrak{p} \triangleleft A$ jest ideałem pierwszym, to $\text{rad}(\mathfrak{p}^m) = \mathfrak{p}$, dla dowolnego wykładnika $m \in \mathbb{N}$.
4. Udowodnić, że jeśli A jest dowolnym pierścieniem, zaś $\mathfrak{q} \triangleleft A$ jest ideałem prymarnym, to $\text{rad}(\mathfrak{q})$ jest ideałem pierwszym.
5. Niech A będzie pierścieniem noetherowskim, niech $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$ będą ideałami $\mathfrak{p}$ -prymarnymi. Udowodnić, że wówczas ideał $\mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m$ jest również $\mathfrak{p}$ -prymarny.
6. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathfrak{m} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Udowodnić, że wówczas $\mathfrak{m}$ jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in k$.
7. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Udowodnić, że wówczas $\mathfrak{a}$ jest ideałem radykalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(V)$ dla pewnego zbioru algebraicznego $V \subset k^n$.

Zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na zajęcia 6 kwietnia.