

Zestaw zadań 4

1. Niech $f, g \in k[x, y]$, gdzie k jest ciałem algebraicznie domkniętym. Udowodnić, że krzywe algebraiczne wyznaczone przez f i g są równe, tj. $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne n i m takie, że $f \mid g^n$ oraz $g \mid f^m$.
2. Udowodnić, że każdy właściwy ideał radykalny, tj. taki, że $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, jest przekrojem zawierających go ideałów pierwszych.

Wskazówka: Jeśli $\mathfrak{a}$ jest ideałem radykalnym i $a \notin \mathfrak{a}$, to zbiór mnożliwy $S = \{1, a, a^2, \dots\}$ jest rozłączny z $\mathfrak{a}$. Rozważyć ideał maksymalny w rodzinie ideałów zawierających $\mathfrak{a}$ i rozłącznych z S .

Zadania 1 i 2 należy rozwiązać na zajęcia 30 marca.