

Zestaw zadań 3

1. Udowodnić, że jeśli k jest dowolnym ciałem, to
 - a) k^1 jest nierozkładalnym zbiorem algebraicznym,
 - b) k^n jest nierozkładalnym zbiorem algebraicznym.
2. Udowodnić, że niepusty podzbiór otwarty (w topologii Zariskiego) nierozkładalnego zbioru algebraicznego jest nierozkładalny i gęsty.
3. Niech X będzie nierozkładalnym zbiorem algebraicznym. Udowodnić, że domknięcie (w topologii Zariskiego) nierozkładalnego podzbioru Y zbioru X jest nierozkładalne.
4. Niech $\text{Spec } A$ będzie zbiorem wszystkich ideałów pierwszych pierścienia przemiennego A . Dla każdego ideału $\mathfrak{a} \triangleleft A$ definiujemy $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$. Udowodnić, że dla ideałów $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft A$ mamy

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

oraz dla każdej rodziny $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ ideałów pierścienia A mamy

$$\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\left\langle \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \right\rangle\right).$$

Wynioskować stąd, że na $\text{Spec } A$ istnieje topologia, w której zbiorami domkniętymi są zbiory $V(\mathfrak{a})$, dla $\mathfrak{a} \triangleleft A$ (topologia Zariskiego na spektrum pierścienia A).

5. Udowodnić, że $\text{Spec } A$ jest zwartą przestrzenią topologiczną.

Zadania 4 i 5 należy rozwiązać na zajęcia 23 marca.