

1.8 Podstawowe pojęcia teorii kategorii.

Definicja 1.59. Kategoria $\mathcal{C}$ składa się z klasy obiektów $\text{Ob}(\mathcal{C})$, oznaczanych przez $A, B, C, \dots$ oraz klasy morfizmów (albo strzałek) $\text{Ar}(\mathcal{C})$ wraz z:

1. klasami parami rozłącznych strzałek $\text{Hom}(A, B)$, jednej dla każdej pary obiektów $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$; element f klasy $\text{Hom}(A, B)$ nazywamy morfizmem z A do B i oznaczamy $A \xrightarrow{f} B$ lub $f: A \rightarrow B$,
2. funkcjami $\text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$, dla każdej trójki obiektów $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, zwanych składaniem morfizmów; dla morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$ wartości tej funkcji oznaczamy przez $(g, f) \mapsto g \circ f$, a morfizm $A \xrightarrow{g \circ f} C$ nazywamy złożeniem morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$.

Ponadto wymagamy, aby spełnione były następujące aksjomaty:

Łączność. Jeśli $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ i $C \xrightarrow{h} D$ są morfizmami w $\mathcal{C}$, to

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Identyczność. Dla każdego obiektu $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ istnieje morfizm $B \xrightarrow{1_B} B$ taki, że dla każdego morfizmu $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$

$$1_B \circ f = f \text{ oraz } g \circ 1_B = g.$$

Jeśli klasy $\text{Ob}(\mathcal{C})$ i $\text{Ar}(\mathcal{C})$ są zbiorami, to kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy małą. Jeśli wszystkie klasy $\text{Hom}(A, B)$ są zbiorami, to kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy lokalnie małą.

Przykład 1.60. Niech $(P, \leq)$ będzie częściowym porządkiem. Kategorię $\mathcal{P}$ określamy następująco: obiektami $\text{Ob}(\mathcal{P})$ są elementy zbioru P , zaś $a \rightarrow b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq b$.

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną i rozważmy częściowy porządek $(\tau, \subseteq)$. Określoną powyżej kategorię $\mathcal{P}$ dla takiego porządku będziemy oznaczać przez $\mathcal{O}(X)$ i nazywać *kategorią posetalną* przestrzeni (X, τ) .

Definicja 1.61. Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami. Funktorem kowariantnym F z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ nazywamy parę odwzorowań $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ i $\text{Ar}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ar}(\mathcal{D})$ (oznaczanych tym samym symbolem F), które przyporządkowują dowolnemu obiektowi $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ obiekt $F(A) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ i dowolnemu morfizmowi $A \xrightarrow{f} B$ w $\text{Ar}(\mathcal{C})$ morfizm $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ w $\text{Ar}(\mathcal{D})$ w taki sposób, że spełnione są następujące aksjomaty:

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$, dla dowolnego $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, dla dowolnych $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$ w $\text{Ar}(\mathcal{C})$.

Funktorem kontrawariantnym nazywamy analogicznie zdefiniowaną parę odwzorowań, w których morfizmowi $A \xrightarrow{f} B$ w $\text{Ar}(\mathcal{C})$ przyporządkowany jest morfizm $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$ w $\text{Ar}(\mathcal{D})$ oraz warunek 2. zastąpiony jest przez

- 2'. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, dla dowolnych $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$ w $\text{Ar}(\mathcal{C})$.

Przykład 1.62. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, niech $V \subseteq k^n$ będzie rozmaitością algebraiczną, niech (V, τ) będzie przestrzenią topologiczną z topologią Zarisskiego i niech $\mathcal{O}(V)$ będzie kategorią posetalną przestrzeni (V, τ) . Niech $k - \text{Alg}$ będzie kategorią k -algebra.

Prasnopem nazywamy funktor kontrawariantny $F: \mathcal{O}(V) \rightarrow k - \text{Alg}$.

Snopem nazywamy prasnop spełniający dodatkowo następujące aksjomaty:

Lokalność. Jeśli $\{U_i \mid i \in I\}$ jest pokryciem otwartym zbioru $U \in \tau$ oraz dla $s, t \in F(U)$ zachodzi $s|_{U_i} = t|_{U_i}$, $i \in I$, to wówczas $s = t$.

Sklejanie. Jeśli $\{U_i \mid i \in I\}$ jest pokryciem otwartym zbioru $U \in \tau$ oraz dla $i \in I$ istnieje $s_i \in F(U_i)$ takie, że dla dowolnych $j \in I$ zachodzi $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, to wówczas istnieje $s \in F(U)$ takie, że $s|_{U_i} = s_i$, $i \in I$.

Analogicznie można też definiować prasnopy i snopy o wartościach w innych kategoriach $\mathcal{C}$.