

1.7 Snop funkcji regularnych.

Definicja 1.52. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Funkcja $\frac{f}{g} \in k(V)$, $f, g \in k[V]$, jest określona w punkcie $(a_1, \dots, a_n) \in V$ jeśli istnieje przedstawienie ułamka $\frac{f}{g}$ w postaci $\frac{f_1}{g_1}$, $f_1, g_1 \in k[V]$, takie, że $g_1(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Uwaga 1.53. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Każdy element $\frac{f}{g} \in k(V)$, $f, g \in k[V]$, wyznacza funkcję określoną na pewnym niepustym otwartym podzbiorze $U \subseteq V$ o wartościach w k .

Uwaga 1.54. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Jeśli funkcje wymierne $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in k(V)$ mają te same wartości na pewnym niepustym zbiorze otwartym $U \subseteq V$, to są równe.

Uwaga 1.55. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Jeśli funkcja wymierna $\frac{f}{g} \in k(V)$, $f, g \in k[V]$, jest wszędzie określona, to $\frac{f}{g} = \frac{h}{1}$, gdzie $h \in k[V]$.

Definicja 1.56. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Jeśli funkcja wymierna $\frac{f}{g} \in k(V)$ jest określona we wszystkich punktach podzbioru otwartego $U \subseteq V$, to jej zwężenie $\frac{f}{g}|_U$ nazywamy funkcją regularną na U .

Uwaga 1.57. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną, niech $U \subseteq V$ będzie zbiorem otwartym. Niech $\mathcal{O}_V(U)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji regularnych na U . Wówczas $\mathcal{O}_V(U)$ jest pierścieniem względem zwykłych działań dodawania i mnożenia funkcji o wartościach w k , przy czym $k \hookrightarrow \mathcal{O}_V(U)$, a więc $\mathcal{O}_V(U)$ jest k -algebrą. Ponadto jeśli U_1 i U_2 są zbiorami otwartymi oraz $U_1 \subseteq U_2$ to odwzorowanie $\text{res}_{U_1, U_2}: \mathcal{O}_V(U_2) \rightarrow \mathcal{O}_V(U_1)$ określone wzorem

$$\frac{f}{g}|_{U_2} \mapsto \frac{f}{g}|_{U_1}$$

jest homomorfizmem k -algebr.

Definicja 1.58. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Funktor $\mathcal{O}_V$, czyli parę odwzorowań

$$U \mapsto \mathcal{O}_V(U) \text{ oraz } U_1 \subseteq U_2 \mapsto \text{res}_{U_1, U_2}: \mathcal{O}_V(U_2) \rightarrow \mathcal{O}_V(U_1)$$

nazywamy snopem funkcji regularnych na V .