

1.6 Ciała funkcji wymiernych na rozmaitościach.

Definicja 1.46. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ zbiorem algebraicznym, $\mathcal{I}(V)$ ideałem zbioru V . Pierścień $k[V] := k[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(V)$ nazywamy pierścieniem funkcji wielomianowych na V .

Uwaga 1.47. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ zbiorem algebraicznym, $\mathcal{I}(V)$ ideałem zbioru V . Niech $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Wielomian f wyznacza funkcję wielomianową $k^n \rightarrow k$. Niech f_V oznacza zwężenie funkcji f do V , $f_V = f|_V$. Wówczas $f_V = g_V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f + \mathcal{I}(V) = g + \mathcal{I}(V)$.

Uwaga 1.48. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ zbiorem algebraicznym, $\mathcal{I}(V)$ ideałem zbioru V . Niech $\kappa: k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[V]$ oznacza epimorfizm kanoniczny, $\kappa(f) = \bar{f} := f + \mathcal{I}(V)$. Wówczas $k[V]$ jest k -pierścieniem skończenie generowanym nad k przez $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$.

Uwaga 1.49. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $V \subseteq k^n$ zbiorem algebraicznym, $\mathcal{I}(V)$ ideałem zbioru V . Wówczas $k[V]$ nie ma niezerowych elementów nilpotentnych.

Twierdzenie 1.50. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Wówczas k -pierścień A jest izomorficzny z pierścieniem funkcji wielomianowych nad pewnym zbiorem $V \subseteq k^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończenie generowany nad k i nie ma niezerowych elementów nilpotentnych.

Definicja 1.51. Niech k będzie ciałem, $V \subseteq k^n$ rozmaitością algebraiczną. Ciałło ułamków $k(V)$ pierścienia $k[V]$ nazywamy ciałem funkcji wymiernych na V .