

## 1.5 Zastosowania twierdzenia Hilberta o zerach.

### 1.5.1 Rozkład prymarny.

S. Balcerzyk, T. Józefiak, *Pierścienie przemienne*, PWN, Warszawa 1985.

**Uwaga 1.30.** Rozważmy pierścień  $\mathbb{Z}$  i element  $n \in \mathbb{Z}$ . Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby pierwsze  $p_1, \dots, p_m$  i wykładniki  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  takie, że

$$n = \pm p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

lub równoważnie

$$\langle n \rangle = \langle p_1^{k_1} \rangle \cdot \dots \cdot \langle p_m^{k_m} \rangle = \langle p_1^{k_1} \rangle \cap \dots \cap \langle p_m^{k_m} \rangle.$$

**Definicja 1.31.** *Ideał  $\mathfrak{q}$  pierścienia  $A$  nazywamy prymarnym, jeżeli  $\mathfrak{q} \neq A$  i dla każdych  $a, b \in A$ :*

$$ab \in \mathfrak{q} \wedge b \notin \mathfrak{q} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} (a^n \in \mathfrak{q}).$$

**Przykład 1.32.** Rozważmy pierścień  $\mathbb{Z}$ , liczbę pierwszą  $p$  i wykładnik  $k \in \mathbb{N}$ . Wówczas  $\langle p^k \rangle$  jest ideałem prymarnym.

**Wniosek 1.33.** Rozważmy pierścień  $\mathbb{Z}$  i ideał  $\mathfrak{a} \triangleleft \mathbb{Z}$ . Wówczas  $\mathfrak{a}$  istnieją jednoznacznie wyznaczone ideały prymarne  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$  takie, że

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

**Twierdzenie 1.34.** Niech  $A$  będzie pierścieniem noetherowskim, niech  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ . Wówczas istnieją ideały prymarne  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$  takie, że

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

Otrzymany rozkład ideału  $\mathfrak{a}$  nazywamy rozkładem prymarnym.

**Uwaga 1.35.** Niech  $A$  będzie pierścieniem noetherowskim, niech  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , niech

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

będzie rozkładem prymarnym ideału  $\mathfrak{a}$ . Z powyższego przekroju możemy usunąć każdy ideał, który zawiera przekrój wszystkich pozostałych czynników:

$$\mathfrak{q}_i \not\subseteq \prod_{j \neq i} \mathfrak{q}_j = \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j. \quad (1.1)$$

**Definicja 1.36.** *Jeśli  $\mathfrak{q}$  jest ideałem prymarnym pierścienia  $A$  i  $\mathfrak{p} = \text{rad}(\mathfrak{q})$ , to  $\mathfrak{q}$  nazywamy ideałem  $\mathfrak{p}$ -prymarnym.*

**Lemat 1.37.** *Niech  $A$  będzie dowolnym pierścieniem, niech  $\mathfrak{q} \triangleleft A$  będzie ideałem prymarnym. Wówczas  $\mathfrak{p} = \text{rad}(\mathfrak{q})$  jest ideałem pierwszym.*

**Lemat 1.38.** Niech  $A$  będzie pierścieniem noetherowskim, niech  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$  będą ideałami  $\mathfrak{p}$ -prymarnymi. Wówczas ideał  $\mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m$  jest również  $\mathfrak{p}$ -prymarny.



**Uwaga 1.39.** Niech  $A$  będzie pierścieniem noetherowskim, niech  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , niech

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

będzie rozkładem prymarnym ideału  $\mathfrak{a}$ . W powyższym przekroju możemy zgrupować wszystkie ideały, które mają ten sam radykał:

$$\text{rad}(\mathfrak{q}_i) \neq \text{rad}(\mathfrak{q}_j) \text{ dla } i \neq j. \quad (1.2)$$

**Definicja 1.40.** Niech  $A$  będzie pierścieniem noetherowskim, niech  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ , niech

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

będzie rozkładem prymarnym ideału  $\mathfrak{a}$ . Jeżeli spełnione są warunki (1.1) i (1.2), to powyższy rozkład nazywamy minimalnym rozkładem prymarnym.

**Twierdzenie 1.41. (Lasker-Noether)** Niech  $A$  będzie pierścieniem noetherowskim, niech  $\mathfrak{a} \triangleleft A$ . Wówczas istnieje minimalny rozkład prymarny

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

Ponadto ideały  $\mathfrak{p}_i = \text{rad}(\mathfrak{q}_i)$  są wyznaczone jednoznacznie.

**Wniosek 1.42.** Niech  $k$  będzie ciałem algebraicznie domkniętym, niech  $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ . Niech

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m.$$

będzie rozkładem prymarnym ideału  $\mathfrak{a}$  z ideałami pierwszymi  $\mathfrak{p}_i = \text{rad}(\mathfrak{q}_i)$ . Wówczas  $\mathcal{Z}(\mathfrak{q}_i)$  są rozmaitościami algebraicznymi.

### 1.5.2 Ideały maksymalne pierścienia wielomianów.

**Uwaga 1.43.** Niech  $k$  będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech  $\mathfrak{m} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ . Wówczas  $\mathfrak{m}$  jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$  dla pewnych  $a_1, \dots, a_n \in k$ .

### 1.5.3 Ideały radykalne.

**Definicja 1.44.** *Ideał  $\mathfrak{a}$  pierścienia  $A$  nazywamy radykalnym, jeżeli  $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{a})$ .*

**Uwaga 1.45.** Niech  $k$  będzie ciałem algebraicznie domkniętym i niech  $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ . Wówczas  $\mathfrak{a}$  jest ideałem radykalnym wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{a} = \mathcal{I}(V)$  dla pewnego zbioru algebraicznego  $V \subset k^n$ .