

1.4 Twierdzenie Hilberta o zerach.

Definicja 1.23. Niech A będzie pierścieniem, $\mathfrak{a} \triangleleft A$ ideałem pierścienia A . Zbiór

$$\text{rad}(\mathfrak{a}) = \{a \in A \mid a^n \in \mathfrak{a} \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}$$

nazywamy radykałem ideału $\mathfrak{a}$.

Uwaga 1.24. Niech A będzie pierścieniem, $\mathfrak{a} \triangleleft A$ ideałem pierścienia A . Wówczas $\text{rad}(\mathfrak{a})$ jest ideałem pierścienia A .

Uwaga 1.25. Niech $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas

$$\mathfrak{a} \subseteq \text{rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})).$$

Twierdzenie 1.26. (Hilberta o zerach) Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, niech $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}))$.

Lemat 1.27. Niech k będzie podciałem pierścienia przemiennego z jedyneką A i niech $L = k[x_1, \dots, x_n]$ będzie podpierścieniem A generowanym przez elementy $x_1, \dots, x_n \in A$ nad k . Jeśli L jest ciałem, to L jest skończonym rozszerzeniem k .

Lemat 1.28. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, niech $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ będzie ideałem właściwym. Wówczas $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.

Lemat 1.29. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, niech $\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wielomiany $h_1, \dots, h_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ takie, że

$$f_1 h_1 + \dots + f_r h_r = 1.$$