

1.3 Rozmaitości algebraiczne.

Definicja 1.17. Niepusty zbiór algebraiczny $V \subseteq k^n$ nazywamy rozmaitością algebraiczną, jeżeli stowarzyszony z nim ideał $\mathcal{I}(V)$ pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$ jest pierwszy.

Definicja 1.18. Niepusty zbiór algebraiczny $V \subseteq k^n$ nazywamy nierozkładalnym, jeżeli dla dowolnych zbiorów algebraicznych $A, B \subseteq k^n$:

$$V = A \cup B \Rightarrow V = A \vee V = B.$$

Twierdzenie 1.19. *Niepusty zbiór algebraiczny $V \subseteq k^n$ jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością algebraiczną.*

Twierdzenie 1.20. *Każdy zbiór algebraiczny A jest skończoną sumą mnogościową rozmaitości algebraicznych:*

$$A = V_1 \cup \dots \cup V_r, \quad r \geq 1.$$

Jeśli w tym rozkładzie rozmaitości V_i są nieporównywalne (tzn. $V_i \not\subset V_j$ dla $i \neq j$), to przedstawienie to jest jednoznaczne.

Uwaga 1.21. Niech $V \subseteq k^n$ będzie rozmaitością algebraiczną rozważaną jako przestrzeń topologiczna z topologią dziedziczną z topologii Zariskiego przestrzeni k^n . W przestrzeni V każde dwa niepuste zbiory otwarte mają niepusty przekrój.

Uwaga 1.22. Niech $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ oznacza *spektrum* pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$, czyli zbiór wszystkich ideałów pierwszych. Niech $\text{Var } k^n$ oznacza zbiór wszystkich rozmaitości algebraicznych w przestrzeni k^n . Odwzorowanie

$$\mathcal{I}: \text{Var } k^n \rightarrow \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n], \quad V \mapsto \mathcal{I}(V)$$

jest

1. różnowartościowe,
2. surjektywne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ideału $\mathfrak{p}$ pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$

$$\mathfrak{p} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{p})).$$