

1.2 Topologia Zariskiego.

Lemat 1.9. *Skończona suma zbiorów algebraicznych jest zbiorem algebraicznym. Dokładniej, niech $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m$ będą ideałami pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas*

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}_1) \cup \dots \cup \mathcal{Z}(\mathfrak{a}_m) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{a}_m),$$

gdzie $\mathfrak{a}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{a}_m = \{ \sum_{i=1}^k a_{i1}a_{i2}\dots a_{im} \mid k \in \mathbb{N}, a_{ij} \in \mathfrak{a}_j, j \in \{1, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, k\} \}$.

Uwaga 1.10. Niech $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m$ będą ideałami pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{a}_m) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_m).$$

Lemat 1.11. *Dowolny przekrój zbiorów algebraicznych jest zbiorem algebraicznym. Dokładniej, niech $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ będzie rodziną ideałów pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{Z}(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{Z}\left(\left\langle \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i \right\rangle\right).$$

Uwaga 1.12. Niech $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m$ będą ideałami pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_m) = \mathcal{Z}(\langle \mathfrak{a}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{a}_m \rangle).$$

Twierdzenie 1.13. *W przestrzeni k^n istnieje topologia, której zbiorami domkniętymi są zbiory algebraiczne w k^n .*

Definicja 1.14. Topologię przestrzeni k^n wyznaczoną przez zbiory algebraiczne jako zbiory domknięte nazywamy topologią Zariskiego przestrzeni k^n .

Uwaga 1.15. W każdej niepustej rodzinie zbiorów algebraicznych istnieje minimalny zbiór algebraiczny.

Uwaga 1.16. Każdy zbiór algebraiczny $V \subseteq k^n$ jest zwarty w topologii Zariskiego.