

1 Afiniczne zbiory algebraiczne.

1.1 Zbiory algebraiczne i ich ideały.

Niech k będzie dowolnym ciałem.

Definicja 1.1. *Zerem wielomianu $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ w przestrzeni afinicznej k^n nazywamy każdy punkt $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ taki, że $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.*

Zbiorem algebraicznym V nazywamy podzbiór przestrzeni afinicznej k^n złożony z wszystkich wspólnych zer pewnego zbioru $\mathcal{S} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$:

$$V = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ dla wszystkich } f \in \mathcal{S}\}.$$

Zbiór V nazywamy zbiorem algebraicznym wyznaczonym przez zbiór wielomianów $\mathcal{S}$ i oznaczamy $V = \mathcal{Z}(\mathcal{S})$.

Uwaga 1.2. Niech $\mathcal{S} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ i niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$ generowanym przez zbiór $\mathcal{S}$. Wówczas

$$\mathcal{Z}(\mathcal{S}) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}).$$

Uwaga 1.3. Niech $\mathcal{S} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas istnieje skończony zbiór wielomianów $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ taki, że

$$\mathcal{Z}(\mathcal{S}) = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_r).$$

Uwaga 1.4. Niech $V \subseteq k^n$ będzie zbiorem algebraicznym. Zbiór $\mathcal{I}(V)$ wszystkich wielomianów zerujących się na V :

$$\mathcal{I}(V) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ dla wszystkich } (a_1, \dots, a_n) \in V \}$$

jest ideałem pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$.

Definicja 1.5. Niech $V \subseteq k^n$ będzie zbiorem algebraicznym. Ideał $\mathcal{I}(V)$ złożony ze wszystkich wielomianów zerujących się w każdym punkcie V nazywamy ideałem stowarzyszonym ze zbiorem algebraicznym V , lub ideałem odpowiadającym zbiorowi algebraicznemu V , lub po prostu ideałem zbioru algebraicznego V .

Uwaga 1.6. Niech $V, V_1, V_2 \subset k^n$ będą zbiorami algebraicznymi w przestrzeni k^n , niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ będą ideałami pierścienia $k[x_1, \dots, x_n]$. Wówczas:

1. $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \Rightarrow \mathcal{Z}(\mathfrak{a}_1) \supseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{a}_2),$

2. $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) \supseteq \mathfrak{a},$

3. $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(V)) = V,$

4. $V_1 \subseteq V_2 \Leftrightarrow \mathcal{I}(V_1) \supseteq \mathcal{I}(V_2),$

5. $V_1 = V_2 \Leftrightarrow \mathcal{I}(V_1) = \mathcal{I}(V_2).$

Lemat 1.7. Niech $f, g \in k[x_1, x_2]$ i załóżmy, że f jest nierozkładalny w $k[x_1, x_2]$ oraz $f \nmid g$.
Wówczas układ równań

$$f(x_1, x_2) = 0 \quad \text{oraz} \quad g(x_1, x_2) = 0$$

ma tylko skończoną liczbę rozwiązań w ciele k .

Twierdzenie 1.8. Niech $f \in k[x_1, x_2]$ będzie wielomianem nierozkładalnym w $k[x_1, x_2]$. Jeśli krzywa $\mathcal{Z}(f)$ ma nieskończenie wiele punktów, to wówczas

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(f)) = \langle f \rangle.$$