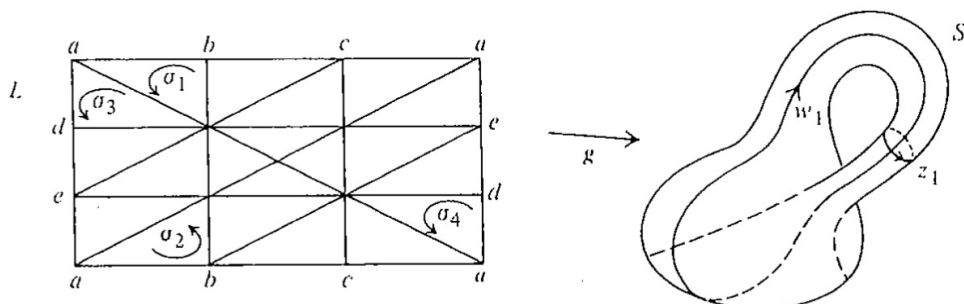


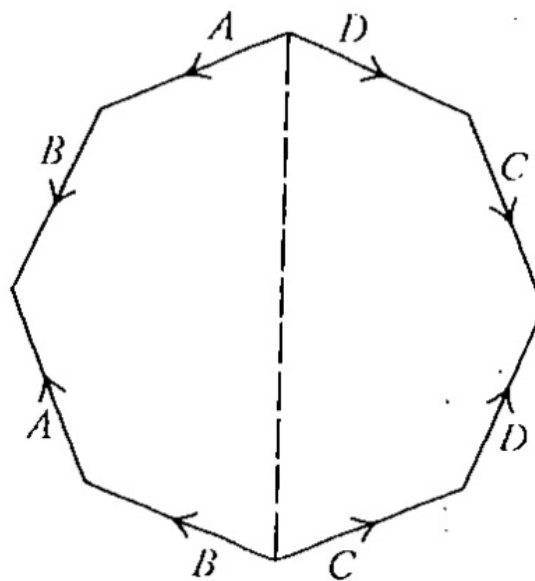
5.1 Zadania

Ćwiczenie 5.1. Niech w_1 i z_1 będą cyklami na butelce Kleina zaznaczonymi na obrazku:

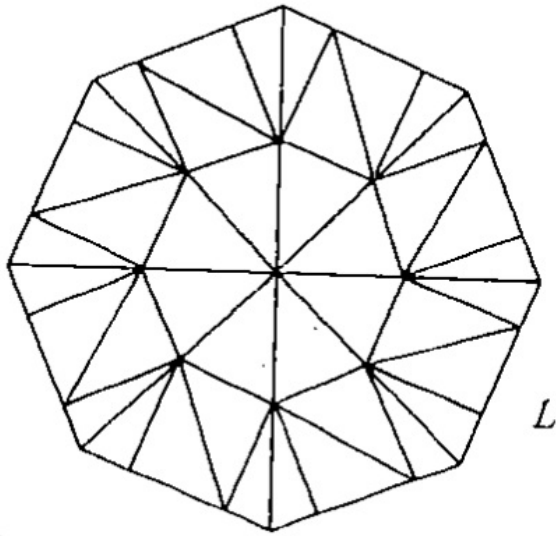


Udowodnij, że $w_1 + z_1$ jest reprezentantem warstwy generującej grupę $H_1(S)/T_1(S)$.

Ćwiczenie 5.2. Sumę spójną $T \# T$ dwóch torusów otrzymujemy wycinając otwarty dysk z każdego z torusów T , a następnie sklejając je wzdłuż powstałych brzegów. Sumę tę można otrzymać jako przestrzeń ilorazową ośmiokąta poprzez utożsamienie brzegów tak, jak na obrazku:



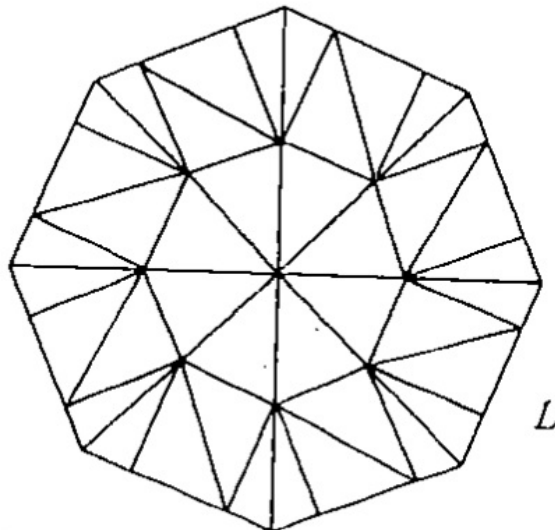
1. Zbuduj kompleks K , którego podległą przestrzenią jest $T \# T$, poprzez odpowiednie etykietowanie wierzchołków kompleksu L zilustrowanego poniżej:



2. Oblicz homologię $T \# T$ naśladując metodę z dowodu Twierdzenia 5.3.

Dokładniej, niech A będzie obrazem $\text{Bd } L$ poprzez odwzorowanie sklejające. Wówczas A jest homeomorficzne z sumą mnogościową 4 okręgów o 1 punkcie wspólnym. Niech wszystkie 2-sympleksy w L będą zorientowane przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, niech γ będzie sumą odpowiadających im sympleksów w K . Pokaż, że każdy 1-sympleks w K jest homologiczny z cyklem przenoszonym przez A . Następnie pokaż, że każdy 2-łańcuch w K , którego brzeg jest przenoszony przez A jest wielokrotnością γ . Obliczenie homologii będzie teraz polegało na analizie 1-cykli przenoszonych przez A oraz na obliczeniu wartości $\delta\gamma$.

Ćwiczenie 5.3. Oblicz homologię poczwórnej sumy płaszczyzn rzutowych $P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$. Rozpocznij od odpowiedniego etykietowania wierzchołków kompleksu L :



Ćwiczenie 5.4.

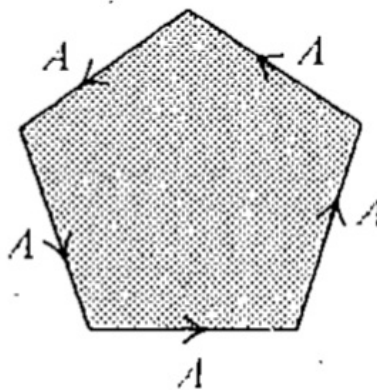
1. Zdefiniuj n -krotną sumę spójną torusów $X_n = T \# T \# \dots \# T$ i oblicz jej homologię.

2. Zdefiniuj n -krotną sumę spójną płaszczyzn rzutowych $Y_n = P^2 \# P^2 \# \dots \# P^2$.

Ćwiczenie 5.5. Oblicz homologię $T \# P^2$.

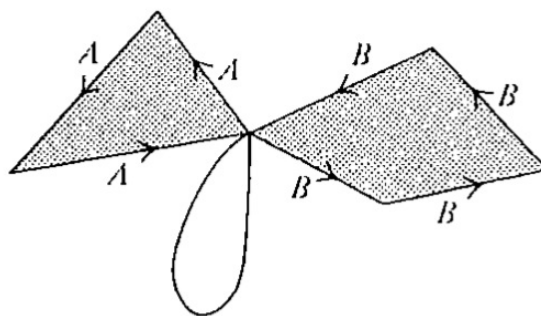
Ćwiczenie 5.6.

1. Oblicz homologię 5-krotnych **oślich uszu**, tj. przestrzeni ilorazowej następującej przestrzeni:



2. Oblicz homologię n -krotnych oślich uszu.

Ćwiczenie 5.7. Oblicz homologię następującej przestrzeni:



Ćwiczenie 5.8. Udowodnij, że dla danej skończonej generowanej grupy abelowej G_1 oraz wolnej grupy abelowej G_2 o skończonej randze, istnieje 2-wymiarowy kompleks K taki, że $|K|$ jest spójna, $H_1(K) \cong G_1$ oraz $H_2(K) \cong G_2$.